DIE BERECHNUNG DER UMLAUFGESCHWINDIGKEIT IN GEHEIZTEN VERTIKALEN ROHREN

Von

E. RÁCZ

Lehrstuhl für Flugzeugbau, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 17. März 1962)

Es soll die Umlaufgeschwindigkeit (v_0) in dem in Abb. 1 schematisch dargestellten, gut wärmeisolierten Apparat unter der Bedingung berechnet werden, daß der Wert von v_0 innerhalb der Grenzen von 0,5—1,5 m/sec liegt und daß das Rohr nur dermaßen geheizt wird, daß die Dampfbildung in dem freien (nicht geheizten) Abschnitt des Steigrohres beginnt (s. Punkt A in Abb. 1). Diese Bedingungen schränken zwar die Verwendbarkeit der nachfolgenden Berechnungsmethode ein, doch erfüllen sie sich in vielen praktischen Fällen — nicht so sehr bei Wasserrohrkesseln, als vielmehr bei ähnlich gestalteten Verdampfern, Destillierapparaten usw. —, und dann ergibt diese Berechnungsmethode für praktische Zwecke gut brauchbare Resultate.

Ist der von den Dampfblasen besetzte Teilquerschnitt des Rohres im Abstand x vom Punkt A (f ist der ganze Rohrquerschnitt)

$$f_d = \varphi f, \tag{1}$$

so schreibt sich der von der Flüssigkeit besetzte Teilquerschnitt zu

$$f_f = (1 - \varphi) f. \tag{2}$$

Es sei weiters v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Querschnitt x, w die absolute Geschwindigkeit des Dampfes, also $u = w - v$ die relative Geschwindigkeit des Dampfes zur Flüssigkeit. Die entsprechenden *dimensionslosen Geschwindigkeiten* bezeichnen wir wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v}{v_0} \\ \bar{w} &= \frac{w}{v_0} \\ \bar{u} &= \frac{u}{v_0} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Das Gewicht des das Rohr sekundlich durchströmenden *Gemisches* läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$G_g = f v_0 \gamma_f , \tag{4}$$

wo γ_f die Wichte der Flüssigkeit ist.

Für das sekundliche Dampfgewicht im Querschnitt x schreiben wir mit dem Gewicht des Gemisches

$$G_d = c G_g , \tag{5}$$

wo also c *der gewichtliche relative Dampfgehalt* an der Stelle x ist.

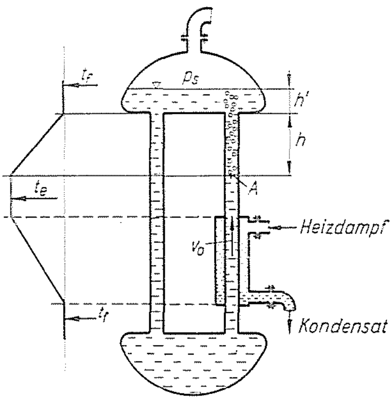

Abb. 1

Das Gewicht der durchströmenden Flüssigkeit schreibt sich gleichzeitig zu

$$G_f = (1 - c)\, G_g . \tag{6}$$

Setzt man die so erhältlichen beiden Ausdrücke für das Dampf- bzw. Flüssigkeitsgewicht einander gleich, so bekommt man (mit γ_d für die Dampfwichte)

$$\left.\begin{aligned} f v_0 \gamma_f c &= \varphi f w \gamma_d \\ f v_0 \gamma_f (1 - c) &= (1 - \varphi) f v \gamma_f \end{aligned}\right\} , \tag{7}$$

bzw. mit der Bezeichnung für die relative Wichte $\gamma = \dfrac{\gamma_f}{\gamma_d}$

$$\left.\begin{aligned} \gamma c &= \varphi \overline{w} \\ 1 - c &= (1 - \varphi)\, \overline{v} \end{aligned}\right\} . \tag{8}$$

Die Gleichungen (8) legen wichtige Zusammenhänge zwischen den für die Strömung charakteristischen dimensionslosen Größen fest. γ hängt im wesentlichen vom Druck im oberen Gefäß, d. h. vom sogenannten Separatordruck (p_s) ab; von der unbedeutenden Veränderung von γ längs des Rohres kann hierbei abgesehen werden.

Eliminiert man aus den Gleichungen (8) das φ, so erhält man wegen $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ für die dimensionslose Flüssigkeits- bzw. Dampfgeschwindigkeit die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{2}\left[(\gamma - 1)\,c - \bar{u} + 1\right] + \sqrt{1/4\left[(\gamma - 1)\,c - \bar{u} + 1\right]^2 + \bar{u}\,(1 - c)} \\ \bar{w} &= \frac{1}{2}\left[(\gamma - 1)\,c + \bar{u} + 1\right] + \sqrt{1/4\left[(\gamma - 1)\,c - \bar{u} + 1\right]^2 + \bar{u}\,(1 - c)} \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

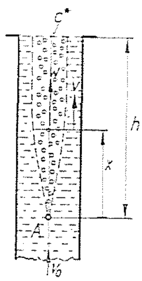

Abb. 2

In den oben umschriebenen praktischen Fällen lassen sich

$$1 - c \approx 1 \quad \text{und} \quad \gamma - 1 \approx \gamma$$

nehmen, es wird mithin

$$\left.\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{2}\,(\gamma c - \bar{u} + 1) + \sqrt{1/4(\gamma c - \bar{u} + 1)^2 + \bar{u}} \\ \bar{w} &= \frac{1}{2}\,(\gamma c + \bar{u} + 1) + \sqrt{1/4(\gamma c - \bar{u} + 1)^2 + \bar{u}} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Wie ersichtlich, hängen $\bar{v}$ und $\bar{w}$ — bei gegebenem Separatordruck (d. h. bei gegebenem γ) — nur von c und $\bar{u}$ ab.

Die Wichte des Gemisches im Querschnitte x läßt sich unter Berücksichtigung von (8) zu

$$\gamma_g = (1 - \varphi)\,\gamma_f + \varphi\gamma_d = \gamma_f\left[1 - (\gamma - 1)\frac{c}{\bar{w}}\right] \approx \gamma_f\left(1 - \frac{\gamma c}{\bar{w}}\right) \tag{11}$$

schreiben.

Es sei im weiteren angenommen, daß der gewichtliche relative Dampfgehalt proportional mit dem Abstand x vom Punkt A zunimmt, daß also

$$c = \zeta x, \tag{12}$$

worin ζ konstant ist. Diese Annahme ist vor allem dann berechtigt, wenn es—wie schon eingangs angenommen — im Abschnitt der Dampfbildung keine Wärmeübergabe gibt, wenn also die Dampfbildung ausschließlich infolge der annähernd linearen Abnahme des hydrostatischen Druckes zustande kommt.

Die Zirkulation wird durch den *Wichteunterschied* der Flüssigkeit im Fallrohr bzw. des Gemisches im Steigrohr im Rohrabschnitt h aufrechterhalten. (Die wesentlich kleinere Auftriebskraft, die sich aus der Erwärmung der Flüssigkeit um einige Grade im Wärmeumtauscher ergibt, kann außer acht gelassen werden.) Die aus dem hydrostatischen Druckunterschied resultierende spezifische Auftriebskraft kann daher — unter Berücksichtigung von (11) und (12) — folgendermaßen geschrieben werden:

$$p_a = \int_0^h (\gamma_f - \gamma_g)\, \mathrm{d}x = \frac{\gamma_f \gamma}{\zeta} \int_0^{c^*} \frac{c}{\overline{w}}\, \mathrm{d}c\,, \tag{13}$$

worin c^* den relativen Dampfgehalt im oberen Querschnitt des Steigrohres bedeutet (s. Abb. 2).

Will man im folgenden den Reibungsverlust und den Beschleunigungsverlust für den Abschnitt h des Steigrohres berechnen, so hat man zur Ermittlung des Reibungsverlustes für *die kinetische Energie der Volumeinheit des Gemisches* im Querschnitt x auf Grund der Beziehungen (8) die Gleichung

$$E = (1 - \varphi) \frac{\gamma_f v^2}{2g} + \varphi \frac{\gamma_d w^2}{2g} = \frac{\gamma_f v_0^2}{2g} (\overline{v} + c\overline{u})\,, \tag{14}$$

und somit für den Reibungsverlust selbst

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\lambda}{d} \int_0^h E\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{d} \frac{\gamma_f v_0^2}{2g} \int_0^h (\overline{v} + c\overline{u})\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\lambda}{d\zeta} \frac{\gamma_f v_0^2}{2g} \int_0^{c^*} (\overline{v} + c\overline{u})\, \mathrm{d}c\,, \end{aligned} \tag{15}$$

worin λ den Reibungskoeffizienten und d den Rohrdurchmesser bedeuten.

Die die Volumeinheit des Gemisches beschleunigende Kraft läßt sich — ebenfalls unter Berücksichtigung der Beziehungen (8) — in der Form

$$P_b = (1-\varphi)\frac{\gamma_f}{g}\frac{dv}{dt} + \varphi\frac{\gamma_d}{g}\frac{dw}{dt} = \frac{\gamma_f v_0^2}{g}\left(\frac{d\bar{v}}{dx} + c\frac{d\bar{u}}{dx}\right) \tag{16}$$

schreiben, woraus sich der Beschleunigungsverlust des Gemisches für den Abschnitt h zu

$$\begin{aligned} p_b &= \int_0^h P_b\,dx = \frac{\gamma_f v_0^2}{g}\int_0^h\left(\frac{d\bar{v}}{dx} + c\frac{d\bar{u}}{dx}\right)dx = \\ &= \frac{\gamma_f v_0^2}{g}\left(\bar{v}^* - 1 + \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}^*} c\,d\bar{u}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

ergibt. Hierin beziehen sich die mit * bezeichneten Größen auf den oberen Querschnitt des Steigrohres.

Um im weiteren die Werte von p_a, p_r und p_b im gegebenen Fall numerisch ermitteln zu können, sollen hier Versuchsergebnisse verwendet werden, die eine Beziehung zwischen den dimensionslosen Geschwindigkeiten und dem relativen Dampfgehalt festzulegen gestatten. Die für diese Zwecke geeigneten Versuchsergebnisse von PETERSON sind in Abb. 3 zusammengefaßt, in welcher die relative Geschwindigkeit u der Dampfblasen in Abhängigkeit von der Umlaufgeschwindigkeit v_0 bei den verschiedenen Parameterwerten *der reduzierten Dampfgeschwindigkeit* w_r in vertikalen Rohren aufgetragen ist. Unter reduzierter Geschwindigkeit versteht Peterson eine auf den ganzen Rohrquerschnitt bezogene Geschwindigkeit des Dampfes, deren Zusammenhang mit w sich sehr einfach aus der Beziehung

$$\gamma_d \varphi f w = \gamma_d f w_r$$

ergibt, woraus

$$w_r = \varphi w\,,$$

bzw. auf Grund von (8)

$$\bar{w}_r = \varphi\bar{w} = \gamma c\,. \tag{18}$$

Trägt man die Kurvenschar von Peterson in ein Koordinaten-System $\bar{w}_r = \gamma c$, $\bar{u}$ mit den Parameterwerten von v_0 auf, so erhält man das Bild gemäß Abb. 4.

Wie man sieht, läßt sich für den Bereich $v_0 = 0{,}5$ — $1{,}5$ m/sec mit sehr guter Annäherung ein Zusammenhang zwischen $\bar{u}$ und γc, u. zw.

$$\bar{u} = 0{,}85\,(1 + \gamma c) \tag{19}$$

schreiben.

Diese einheitliche Beziehung erleichtert die weiteren Berechnungen wesentlich.

Mit (19) nehmen die Ausdrücke (13), (15) und (17) folgende Form an:

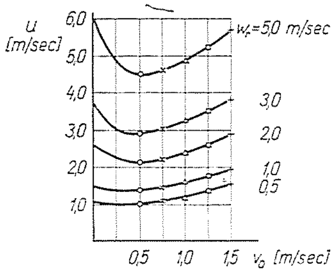

Abb. 3

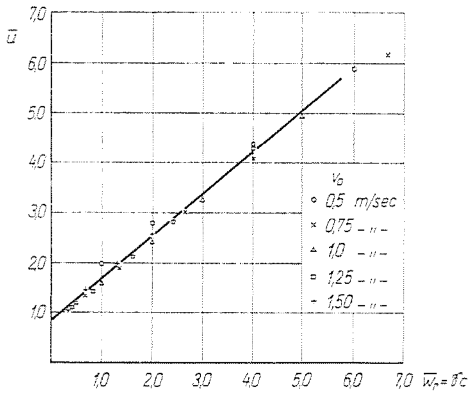

Abb. 4

$$p_a = \frac{\gamma_f}{\zeta} \int\limits_0^{c^*} \frac{\gamma c}{0{,}925\,(1 + \gamma c) + \sqrt{[0{,}075\,(1 + \gamma c)]^2 + 0{,}85\,(1 + \gamma c)}}\, \mathrm{d}c \tag{20}$$

$$\begin{aligned} p_r = \frac{\lambda}{d\zeta} \frac{\gamma_f v_0^2}{2g} \int\limits_0^{c^*} [(0{,}075 + 0{,}85c)\,(1 + \gamma c) + \\ + \sqrt{[0{,}075\,(1 + \gamma c)]^2 + 0{,}85\,(1 + \gamma c)}]\; \mathrm{d}c \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} p_b = \frac{\gamma_f v_0^2}{g} [0{,}075\,(1 + \gamma c^*) + \sqrt{[0{,}075\,(1 + \gamma c^*)]^2 + 0{,}85\,(1 + \gamma c^*)} + \\ + 0{,}425\, \gamma c^{*2} - 1] \cdot \end{aligned} \tag{22}$$

Wie ersichtlich, hängen p_a, p_r (außer ζ) und p_b nun nur noch von γc bzw. von c, d. h. von dem gewichtlichen relativen Dampfgehalt ab. Die in den Formeln (20) und (21) vorkommenden Integrale wird man — obwohl das Ergebnis des Integrierens durch weitläufige Ausdrücke auch in geschlossener Form angegeben werden kann — praktisch am zweckmäßigsten graphisch ermitteln.

Die Berechnung kann im weiteren durch Iteration erfolgen. Nimmt man den Anfangswert der Umlaufgeschwindigkeit v_0 in v_{01} an, so kann die im Wärmeumtauscher der umlaufenden Flüssigkeit stündlich übertragene Wärmemenge Q_1 nach den bekannten Zusammenhängen der Wärmeübertragung berechnet werden. Mit dem bekannten Werte von Q_1 hat man sogleich

$$c_1^* = \frac{G_d}{G_g} = \frac{Q_1}{3{,}6\, rf\, v_{01}\, \gamma_f}\, 10^{-3}, \tag{23}$$

worin r die Verdampfungswärme der Flüssigkeit ist (sie kann am Separatordrucke genommen werden).

Für die stationäre Zirkulation der Flüssigkeit gibt die Gleichgewichtsgleichung

$$p_a = p_r + p_b + \Sigma p_h, \tag{24}$$

worin Σp_h den gesamten *hydraulischen Druckverlust* des Zirkulationskreises außerhalb des Siedeabschnittes im Steigrohr (h) bedeutet. Mit dem bekannten v_0 erhält man Σp_h anhand der aus der Hydraulik bekannten Zusammenhänge sehr einfach. In (24) — unter Berücksichtigung von (23) — ist allein ζ unbekannt; welches, und damit auch die Länge des Siedeabschnittes:

$$h_1 = \frac{c_1^*}{\zeta}, \tag{25}$$

gleich zu erhalten ist. (Zur genauen Berechnung von Σp_h müßte man den Wert von h kennen, doch begeht man einen vernachlässigbaren Fehler, wenn man h bloß schätzt.)

Den Temperaturverlauf längs des Steigrohres veranschaulicht Abb. 1 für gute Wärmeisolierung. Die Temperatur im Anfangspunkt des Siedeabschnittes — also im Punkt A — kann von zwei Seiten her berechnet werden.

Für die Erwärmung der Flüssigkeit im Wärmeumtauscher gilt die Beziehung

$$\frac{Q_1}{3{,}6\, f v_{01}\, \gamma_f}\, 10^{-3} = (t_{e1} - t_f)\, c_f,$$

in der t_f die Temperatur der zirkulierenden Flüssigkeit im Fallrohr bzw. vor dem Eintritt in den Wärmeumtauscher, t_{e1} hingegen die Temperatur hinter dem Wärmeumtauscher und c_f die spezifische Wärme der Flüssigkeit (kann bei der Temperatur t_f genommen werden) bezeichnen.

Aus dieser Beziehung erhält man die Temperatur hinter dem Wärmeumtauscher zu

$$t_{e1} = t_f + \frac{Q_1}{3{,}6 f v_{01} \gamma_f c_f} 10^{-3} . \tag{26}$$

Andererseits läßt sich der hydrostatische Druck im Punkt A zu

$$p_A = p_r + p_b + (h + h') \gamma_f - p_a + p_s \tag{27}$$

schreiben.

Die dem Druck p_A entsprechende gesättigte Dampftemperatur t'_{e1} mußte mit dem aus (26) berechneten Wert von t_{e1} übereinstimmen. Das kann nur zufällig vorkommen, im allgemeinen besteht die Übereinstimmung nicht, man wiederholt deshalb die Berechnung mit einem anderen Wert von v_0. Mit wachsendem v_0 nimmt im allgemeinen t_e ab, t'_e dagegen zu. Der Schnittpunkt der Kurven t_e und t'_e ergibt die tatsächliche Umlaufgeschwindigkeit: v_0. Trägt man gleichzeitig auch die Veränderung von h und Q auf, so erhält man bei v_0 auch die tatsächlichen Werte dieser Größen und damit ein klares Bild über den Ablauf der ganzen Erscheinung.

Die obige Berechnungsmethode eignet sich im wesentlichen auch für kleinere bzw. höhere Werte von v_0, sofern die nötigen Versuchsergebnisse zur Verfügung stehen. Hierbei wird den Zusammenhang zwischen $\bar{u}$ und c wahrscheinlich nicht eine den Formeln (19) gemäß aufgetragene einzige Kurve, sondern eine Kurvenschar mit den Parameterwerten v_0 darstellen, was jedoch den Gang der Berechnung nicht wesentlich beeinflußt.

Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Umlaufgeschwindigkeit in geheizten vertikalen Rohren werden Zusammenhänge zwischen dem gewichtlichen relativen Dampfgehalt und den dimensionslosen Geschwindigkeiten des Dampfes bzw. der Flüssigkeit im Siedeabschnitt abgeleitet. Zu weiteren numerischen Berechnungen werden die Versuchsergebnisse von PETERSON angewendet. Die Berechnung erfolgt auf dem Wege der Iteration.

Literatur

Петерсон, Д. Ф.: К вопросу об относительной движении пара и воды в трубках паровых котлов. Сов. котлотурбостр. 1936. № 4.
Телетов, С. Г.: К методике расчета циркуляции. Известия ЭНИН АН СССР. т. XI. 1940.
MÜNZINGER, FR.: Dampfkraft, 2. Auflage. Berlin 1933.
BECKER, K.: Die Berechnung des natürlichen Wasserumlaufes in Dampfkesseln. München.

Prof. E. RÁCZ, Budapest XI., Bertalan Lajos u. 4—6, Ungarn