BESTIMMUNG DES DRUCKABFALLS BEI LAMINARER STRÖMUNG EINER CASSONSCHEN FLÜSSIGKEIT IM ROHR

Von

B. PALÁNCZ

Lehrstuhl für Chemisches Maschinenwesen und Landwirtschaftliche Industrien, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 23. März 1970)

Vorgelegt von Prof. Dr. S. SZENTGYÖRGYI

Wird ein Rohr mit dem Querschnitt D von einer durch das rheologische Modell τ $(\tau_0, \eta_P, \dot{\gamma})$ gekennzeichneten Flüssigkeit von gegebener Menge Q durchströmt, so gilt die in der Praxis wichtige Bedingung, den auf die Längeneinheit bezogenen Druckabfall $\Delta p/L$ als bekannt anzunehmen. Infolge der hohen Viskosität der plastischen Substanzen kommt dem laminaren Strömungsberei h allgemein größere Bedeutung zu. Als übliche Darstellungsform der Erscheinung wird die Beziehung

$$\lambda = \lambda(P, Re) \tag{1}$$

abgeleitet [1], wobei

$$\lambda = Eu \frac{2R}{L}, \qquad Eu = \frac{\triangle p}{\frac{\varrho}{2} \bar{v}^2}$$

$$Re = \frac{\bar{v} R \varrho}{\eta_P}, \qquad He = \frac{\tau_0 R^2 \varrho}{\eta_P^2} \tag{2}$$

und

$$P = \frac{He}{Re}$$

ist.

Nachstehend sollen die von den oben angeführten abweichenden Veränderlichen eingeführt werden, die im gegenwärtigen Falle leichter erfaßt werden können.

Im Falle einer laminaren, stationären Strömung in einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt gilt

$$\bar{v} = \bar{v} \ (\eta_P, \tau_0, R, \Delta p, L) \,. \tag{3}$$

Für die Bestimmung der dimensionslosen Invarianten scheint die Anwendung der Methode der Basisfaktoren [2] am zweckmäßigsten zu sein. Man bezeichnet den Logarithmus der Dimension einer i-ten physikalischen Menge mit y_i, d. h.

$$y_i = \alpha_{i1} Z_1 + \alpha_{i2} Z_2 + \ldots + \alpha_{ij} Z_j + \ldots, \tag{4}$$

wobei Z_j der Logarithmus der j-ten Grundheit ist. Unter Berücksichtigung der Gleichung (3) ergibt sich

$$\begin{array}{lll} y_1 = \ln \eta_P & y_4 = \ln \Delta p \quad \text{und} & Z_1 = \ln L \\ y_2 = \ln \tau_0 & y_5 = \ln L & Z_2 = \ln M \\ y_3 = \ln R & y_6 = \ln \bar{v} & Z_3 = \ln T \end{array} \tag{5}$$

Somit gilt für die Dimensionsmatrix:

$$\overline{A} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} = \overline{U}\overline{V}^* = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Hieraus geht hervor, daß $\overline{A}$ der Ordnung 3 ist, und daher ist auch die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Gleichungen drei, diese lauten:

$$\begin{array}{lcl} y_1 = -Z_1 & & Z_1 = -y_1 \\ y_2 = -Z_1 - Z_2 & \rightarrow & Z_2 = -Z_1 - y_2 = y_1 - y_2 \\ y_3 = Z_1 - Z_2 + Z_3 & & Z_3 = y_3 - y_2 + 2y_1 . \end{array} \tag{7}$$

und für die Restgleichungen gilt dann

$$\begin{array}{l} y_4 = y_2 \\ y_5 = y_3 \\ y_6 = Z_1 - 2Z_2 + Z_3 = y_3 + y_2 - y_1 . \end{array} \tag{8}$$

Wieder in der ursprünglichen Relation (5) aufgeschrieben heißt es

$$\begin{array}{l} \ln \Delta p = \ln \tau_0 \\ \ln L = \ln R \\ \ln \bar{v} = \ln R + \ln \tau_0 - \ln \eta_P , \end{array} \tag{9}$$

und daraus ergeben sich die Invarianten

$$\pi_0 = \frac{\Delta p}{\tau_0}, \qquad \pi_1 = \frac{R}{L} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \frac{\bar{v}\eta_P}{R\tau_0} \tag{10}$$

deren Produkt ebenfalls eine Invariante darstellt, also ist

$$\pi_3 = \pi_0\,\pi_1 = \frac{\Delta p\, R}{\tau_0 L}\,. \tag{11}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann die Beziehung (3) in die Form

$$\varphi(\pi_2, \pi_3) = 0 \tag{12}$$

gebracht werden. Die Gültigkeitsgrenze wird durch den Wert der von METZNER und REED [3] beim Übergang in eine turbulente Strömung gemessenen kritischen Reynolds-Zahl dargestellt, deren Form nun

$$Re = \frac{8\bar{v}^2\varrho}{\tau_f} \tag{13}$$

ist und für deren kritischen Wert

$$Re^* = 2100 \tag{14}$$

gilt.

Für zahlreiche Suspensionen läßt sich das Cassonsche Modell der Form

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\eta_P\dot{\gamma}} + \sqrt{\tau_0} \tag{15}$$

anwenden.

So kann die in der Zeiteinheit durchströmende Menge — im Falle einer laminaren Strömung — aus der Lösung des Navier—Stokes-Gesetzes folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$Q = \frac{\pi}{\eta_P}\left[\frac{1}{3}\,\tau_0 R^3 + \frac{\Delta p}{8L}\,R^4 - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{\tau_0\Delta p}{2L}}\,R^3\sqrt{R} - \frac{2L^3}{21\Delta p^3}\,\tau_0^4\right]. \tag{16}$$

Werden die soeben definierten Veränderlichen (10) und (11) eingeführt, so erhält man

$$\pi_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\,\pi_3 - \frac{2\sqrt{2}}{7}\sqrt{\pi_3} - \frac{2}{21}\,\frac{1}{\pi_3^3}\,. \tag{17}$$

Die Beziehung (17) ist in Abb. 1 veranschaulicht.

Mit Hilfe der Abb. 1 wird die Bestimmung von $\Delta p/L$ an einem Zahlenbeispiel erörtert.

Beispiel

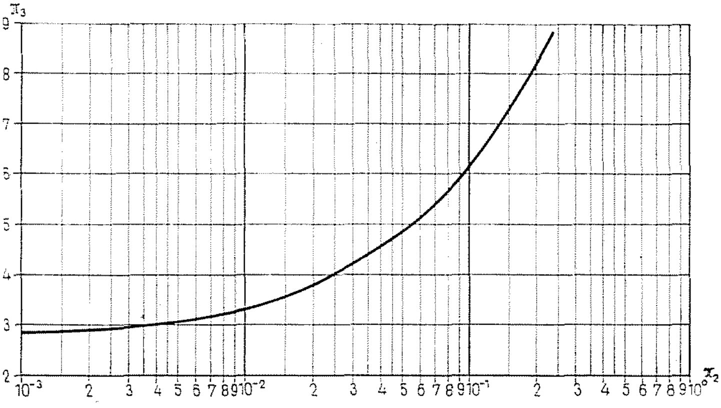

Abb. 1

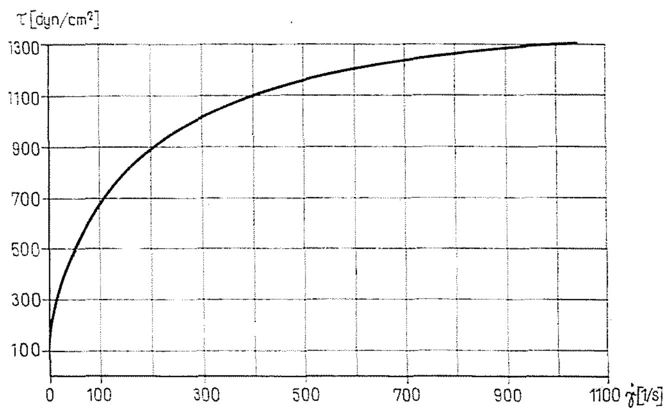

Abb. 2

Daten sind:

$$Q = 2{,}5 \ \mathrm{m^3/h}$$
$$D = 30 \ \mathrm{mm}$$
$$\varrho = 1970 \ \mathrm{kg/m^3}$$

Die Fließkurve der zu transportierenden Substanz, nämlich der 62 Gew.% Kreidepulver enthaltenden wässrigen Suspension bei 30 °C wird in Abb. 2 dargestellt.

Als Durchschnittsgeschwindigkeit gilt:

$$\bar{v} = \frac{Q}{R^2\pi} = \frac{2{,}5}{3600 \times 1{,}5^2 \times 10^{-4}\,\pi} = 0{,}98 \text{ m/s}\,.$$

Die Bestimmung der Ausdrücke τ_0 und η_P erfolgt aus Abb. 3.

Es geht klar hervor, daß der ganze Deformationsgeschwindigkeitsbereich durch eine einzige Gerade nicht gekennzeichnet werden kann. Bei der

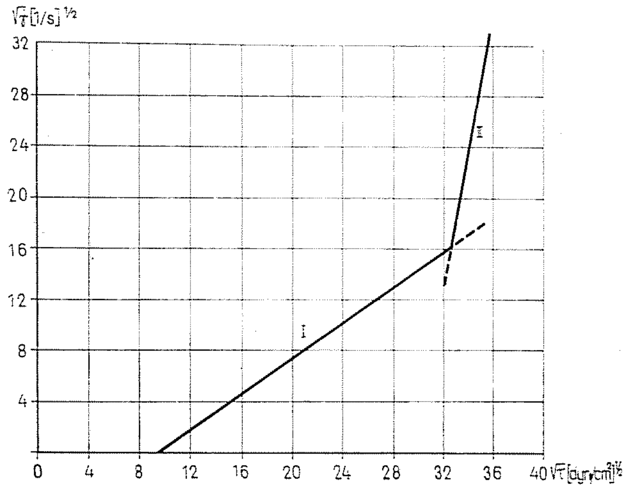

Abb. 3

Wahl der Geraden kann man aus der Bestimmung der durchschnittlichen Deformationsgeschwindigkeit ausgehen, d. h.

$$\dot{\gamma} = \frac{8\bar{v}}{D} = \frac{8 \times 0{,}98}{3 \times 10^{-2}} = 320 \text{ 1/s}$$

und so wird die Gerade II gewählt.

Dann gilt

$$\tau_{0_{\mathrm{II}}} = 29{,}7^2 = 880 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\eta_{P_{\mathrm{II}}} = 0{,}195^2 = 0{,}038 \text{ g/cm s}$$

ferner auch

$$\pi_2 = \frac{\bar{v}\eta_P}{R\tau_0} = \frac{98 \times 0{,}038}{1{,}5 \times 880} = 2{,}82\ 10^{-3}$$

und hierzu gilt noch laut der in Abb. 1 dargestellten Kurve

$$\pi_3 = 2,9$$

und daher wird

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\pi_3 \tau_0}{R} = \frac{2,9 \times 880}{1,5} = 1660 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3} = 1960 \frac{\text{mm(Wassersäule)}}{\text{m}} .$$

Nun müssen bezüglich der erhaltenen Ergebnisse zwei Tatsachen kontrolliert werden, und zwar

a) ob die Gerade II aus Abb. 3 *richtig* gewählt wurde, und

b) ob die *Strömung* wirklich *laminar* ist.

Da für die an der Rohrwand entstehende Gleitspannung

$$\tau_f = \frac{\Delta p\, R}{2L} = \frac{1660 \times 1,5}{2} = 1245 \text{ dyn/cm}^2$$

gilt, und da dieser Wert in Abb. 3 veranschaulicht ist und in den durch die Geraden *II* beschriebenen Bereich fällt, war die Wahl dieser *Geraden richtig*.

Der Wert der Reynolds-Zahl beträgt:

$$Re = \frac{8 \times 1,97 \times 98^2}{1245} = 121,5 < 2100 ,$$

also ist die *Strömung laminar*.

Bezeichnungen

$\bar{v}$	Durchschnittsgeschwindigkeit
Eu	Euler-Zahl
He	Hedström-Zahl
L	Rohrlänge
P	Plastizitätszahl
R	Rohrradius
Re	Reynolds-Zahl
Q	die in der Zeiteinheit durchströmende Menge
$\dot{\gamma}$	Deformationsgeschwindigkeit
Δp	Druckabfall
η_p	plastische Viskosität
λ	Rohrreibungsfaktor
ϱ	Dichte
τ_0	die der Deformationsgeschwindigkeit Null zugehörige Gleitspannung

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wurde ein Rechenverfahren zur Bestimmung des auf die Längeneinheit bezogenen Druckabfalls bei laminarer Strömung einer Cassonschen Flüssigkeit im Rohr durch Einführung entsprechender dimensionsloser Veränderlicher beschrieben. Die Anwendung dieser Methode wurde an Hand eines Zahlenbeispiels erläutert. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß sich $\Delta p/L$ bei der Anwendung dieser Methode unmittelbar ergibt, und da der ganze Deformationsgeschwindigkeitsbereich allgemein nicht beschrieben werden kann, läßt sich mittels einer einzigen Geraden leicht entscheiden, welche richtig anzuwenden ist (siehe Gerade *I* bzw. *II*). Doch besitzt diese Methode einen Nachteil, nämlich, daß sie nur für laminare Strömungen angewendet werden kann.

Natürlicherweise sind die eingeführten Veränderlichen dann bedeutungsvoll, wenn die Beziehung $\varphi(\pi_2, \pi_3) = 0$ *aus Messungen bestimmt wird.*

Literatur

1. WILKINSON, W. L.: Non-Newtonian fluids. New York. Pergamon Press, 1960.
2. FR. BALOGH, L.—BÉKÉSSY, A.—FÁY, GY.: Energia és Atomtechnika **15**, 320—327 (1962).
3. METZNER, A. B.—REED, J. C.: A. I. Ch. E. Journal **1**, 434 (1955).

Béla PALÁNCZ, Budapest XI., Műegyetem rkp. 9, D. ép., Ungarn