

MATHEMATISCH-STATISTISCHE BETRACHTUNGEN ZUR ERMITTLUNG VON FORMABWEICHUNGEN IN DER FERTIGUNGSTECHNIK

Von

J. FARKAS

Lehrstuhl für Feinmechanik—Optik, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 27. Februar, 1976.

Vorgelegt von Prof Dr. O. PETRIK

1. Einleitung

Die Ermittlung und Messung von Formabweichungen haben im Maschinenbau schon ziemlich lange entwickelte und demzufolge in bestimmtem Maße versteifte Methoden. Die Anschauung ist beinahe allgemein geworden, daß das Istprofil mit einem für die Messung angenommenen angrenzenden Profil verglichen werden soll. Das angrenzende Profil ist bekanntlich ein geometrisch ideales Profil, das das Istprofil von der werkstofffreien Seite her berührt und so angeordnet ist, daß der größte Abstand zwischen dem Istprofil und dem angrenzenden Profil ein Minimum ist. Diese meßtechnische Anschauung hat sich in zahlreichen Ländern so durchgesetzt, daß die entsprechenden Verfahren auch in Empfehlungen und Standards festgesetzt wurden [1] [2] [3] [4] [5].

Die traditionellen Verfahren haben unter anderem folgende Mängel:

- a) Das als Bezugsbasis dienende angrenzende Profil (oder die angrenzende Oberfläche) ist nur durch zufällige Punkte geringer Anzahl bestimmt;
- b) die relative Lage des angrenzenden Profils (oder der angrenzenden Oberfläche) ändert sich je nachdem, an welcher Seite des gegebenen Profils (oder der Oberfläche) der Werkstoff zu finden ist;
- c) die relative Lage des angrenzenden Profils (oder der angrenzenden Oberfläche) kann in bestimmten Fällen instabil sein.

Im Sinne des Vorgeführten kann also ein angrenzendes Profil (oder eine angrenzende Oberfläche) ein Profil (oder eine Oberfläche) kaum zuverlässig repräsentieren, da sie aus zwei, drei oder vier Punkten extremer Lage und nicht aus einem unendlichen Punkthaufen bestimmt sind. Überlegen wir jedoch, daß auch zahlreiche zufällige Einflüsse bei der Entwicklung des Istprofils (oder der Oberfläche) mitwirken, so kann die den Ort der Punkte kennzeichnende Größe als eine Zufallsgröße aufgefaßt werden, demzufolge ist es naheliegend, zum Kennzeichnen des Profils (oder der Oberfläche) mathematisch-statistische Methoden anzuwenden. Dabei sind die Abweichungen bei einem bestimmten Profil (oder einer Oberfläche) bei der traditionellen Methode von der

Lage des Werkstoffes abhängig. Die eventuelle Instabilität des angrenzenden Profils (oder der Oberfläche) stellt eine weitere Störung dar.

Es ist anzunehmen, daß die Anwendung von traditionellen Verfahren passungstechnische Gründe hat. Vom Gesichtspunkt der Art der Passung aus ist nämlich — scheinbar — die Abmessung des angrenzenden Profils (oder der Oberfläche) maßgebend. Die Verhältnisse sind aber in Hinsicht auf die Funktion ganz anderer Art. Der Zapfen der Preßpassung einer Welle verhält sich z.B. bei der Passung überhaupt nicht so, wie der angrenzende Zylinder. Es scheinen daher die Bestrebungen logisch zu sein, die das Problem von der Seite der mathematischen Statistik her annähern [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12].

Es ist also begründet, anstatt des angrenzenden Profils (oder der Oberfläche) ein Ausgleichsprofil (oder eine Ausgleichsoberfläche) einzuführen und die Abweichungen von diesem anzugeben. Da die neue Bezugsbasis aus überzähligen Punkten mit der Hilfe der Regressionsrechnung bestimmt wird, kann sie auch als Regressionsprofil (oder Regressionsoberfläche) bezeichnet werden.

An Hand von zwei Beispielen werden im folgenden einige mögliche Methoden vorgeführt.

2. Ermittlung von Formabweichungen von der Geraden

Es sei vorausgesetzt, daß ein durch Messungen erhaltener Datenhaufen mit einer linearen Funktion auszugleichen ist. Der in Bild 1 angegebene Punkthaufen kann z.B. das Ergebnis der Geradheitsmessung eines Lineals sein, kann aber beispielweise auch aus dem Registratum eines Evolventenprüfgerätes stammen.

Wählen wir als Bezugsbasis anstatt der angrenzenden Geraden die ausgleichende Gerade. Wie bekannt, ist es im allgemeinen üblich, die Gleichung der Geraden nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln.

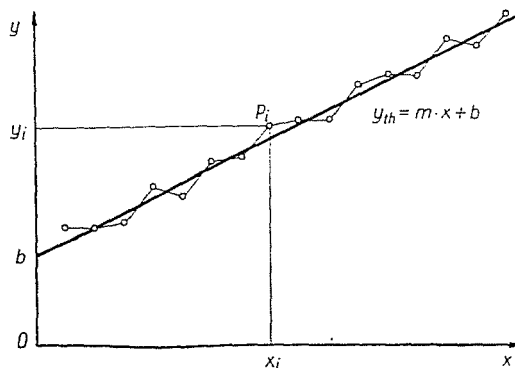


Bild. 1

Gegeben ist die Reihe der zusammengehörenden Wertpaare

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2, & \dots & x_i, & \dots & x_n & \\ y_1, & y_2, & \dots & y_i, & \dots & y_n & \cdot \end{array} \quad (1)$$

Angenähert wird durch eine theoretische lineare Funktion

$$y_{th} = m \cdot x + b \quad (2)$$

so, daß die Quadratsumme der Ordinatenabweichungen ein Minimum ergibt (einfache Regression):

$$Q = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{thi})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = \text{Min!} \quad (3)$$

Es sind Werte von m und b zu suchen, wo die Bedingung (3) erfüllt ist, d.h., man muß das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

auflösen. Die Auflösung ist bekanntlich

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad \text{und} \quad (5)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate hat einen grundsätzlichen Fehler, welcher im allgemeinen übersehen wird: durch abseits gelegene Punkte kann die Regressionsgerade beträchtlich verzerrt werden. Rein mathematisch ist diese Methode richtig, weil sie eine erwartungstreue (unverzerrte) Schätzung liefert. Die lineare Ausgleichung entspricht aber viel mehr dem physikalischen Gehalt. Es kann daher begründet sein, die Ausgleichung nicht nach der Methode

der kleinsten Quadrate, sondern durch Minimalisierung der linearen Potenz der Abweichungen durchzuführen.

Die neue Bedingung lautet also:

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{thi}) = \sum_{i=1}^n (y_i - m \cdot x_i - b) = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i - nb = \text{Min!} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Weil keine weitere Gleichung zur Verfügung steht, lassen sich die Größen m und b auf diesem Wege nicht bestimmen.

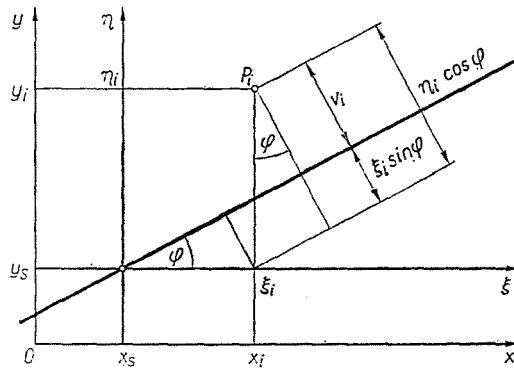


Bild. 2

Um die Aufgabe zu lösen, führen wir eine Koordinatentransformation durch und minimalisieren anstatt der Ordinatendifferenzen die senkrechten Abstände der Punkte von der Regressionsgeraden (orthogonale Regression). Wird das neue Koordinatensystem im Schwerpunkt des Punkthaufens aufgenommen, so geht die Regressionsgerade durch den Ursprung und es muß nun nur ein einziger Parameter (φ) bestimmt werden (Abb. 2).

Die Koordinaten des Schwerpunktes sind:

$$x_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (8) \quad (9)$$

die neuen Koordinaten des i -ten Punktes sind

$$\xi_i = x_i - x_s \quad \text{und} \quad \eta_i = y_i - y_s, \quad (10) \quad (11)$$

der Abstand des Punktes P_i von der Geraden ist

$$v_i = \eta_i \cos \varphi - \xi_i \sin \varphi. \quad (12)$$

Die Summe der Abstände sei minimal:

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (\eta_i \cos \varphi - \xi_i \sin \varphi) = \text{Min}! = 0, \quad (13)$$

so erhält man

$$\varphi = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n |\eta_i|}{\sum_{i=1}^n |\xi_i|}. \quad (14)$$

(Hiermuß mit dem Absolutwert gerechnet werden, weil $\sum_{i=1}^n \eta_i$ und $\sum_{i=1}^n \xi_i$ definitionsgemäß gleich Null sind.)

Wird die Summe der linearen Ordinatendifferenzen minimalisiert, so erhält man dasselbe Ergebnis. Die vorige Koordinatentransformation angewendet, läßt sich nämlich schreiben:

$$\begin{aligned} Q^2 &= \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{thi}) = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_{thi}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\eta_i - \xi_i \tan \varphi) = \sum_{i=1}^n \eta_i - \tan \varphi \sum_{i=1}^n \xi_i = \text{Min}! = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

daraus folgt, daß

$$\varphi = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n |\eta_i|}{\sum_{i=1}^n |\xi_i|}, \quad (16)$$

eine Formel, die mit (14) übereinstimmt. Ob mit der einfachen, ob mit der orthogonalen Regression gerechnet wird, führt also die Minimalisierung der Summe der linearen Abweichungen zu demselben Ergebnis.

Zur Kontrolle der Richtigkeit der Gleichungen (14) und (16) seien folgende Proben durchgeführt:

a) Liegen sämtliche Punkte auf der Achse ξ , so ist

$$\sum_{i=1}^n |\eta_i| = 0 \text{ und } \varphi = \arctan 0 = 0^\circ;$$

b) liegen sämtliche Punkte auf der Achse η , so ist

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i| = 0 \text{ und } \varphi = \arctan \infty = 90^\circ;$$

c) und liegen schließlich sämtliche Punkte auf einer Geraden von 45° , so ist

$$\sum_{i=1}^n |\eta_i| = \sum_{i=1}^n |\xi_i| \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan 1 = 45^\circ,$$

d.h., die Ergebnisse (14) bzw. (16) sind richtig.

Der Vollständigkeit halber seien die Ergebnisse der Methode der kleinsten Quadrate angegeben. Bei der einfachen Regression ist

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{thi})^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_{thi})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (\eta_i - \xi_i \tan \varphi)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - 2 \tan \varphi \sum_{i=1}^n \eta_i \xi_i + \tan^2 \varphi \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \text{Min!} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = -2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sum_{i=1}^n \eta_i \xi_i + 2 \tan \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 0, \quad (18)$$

daraus folgt, daß

$$\varphi = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}. \quad (19)$$

Bei der orthogonalen Regression ist das Ergebnis (die langwierige Ableitung weggelassen)

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2}{2 \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i} \pm \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^2}{4 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2} + 1} \right), \quad (20)$$

welche hingegen von Gleichung (19) bedeutend abweicht.

3. Ermittlung von Formabweichungen von dem Kreis

Bei der Ermittlung der Formabweichungen des in Bild 3 angegebenen Kreises steht man vor zwei wesentlichen Fragen:

- Wo befindet sich der Mittelpunkt des Kreises?
- Wie groß ist der Radius der Kreises?

Die Ermittlung der Formabweichungen des Kreises ist nur möglich, nachdem der Ort des Mittelpunktes sowie der Radius des Regressionskreises bereits richtig bestimmt wurden.

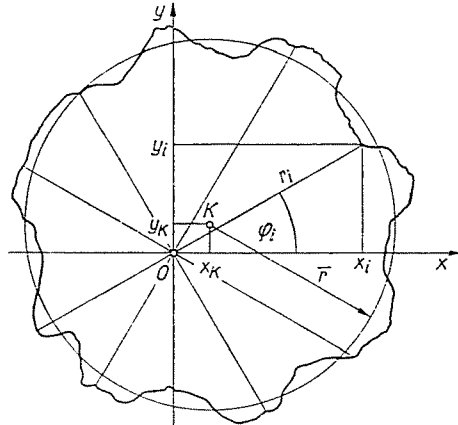


Bild. 3

Zur Ermittlung des Ortes des Ausgleichskreises sei aus einem geschätzten Mittelpunkt O in gleichmäßigen Teilungen eine Reihe

$$r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n \quad (21)$$

gemessen. Bilden wir daraus die einzelnen Projektionen

$$x_i = r_i \cos \varphi_i, \quad (22)$$

$$y_i = r_i \sin \varphi_i. \quad (23)$$

Sollte der geschätzte Mittelpunkt O in den tatsächlichen Mittelpunkt K fallen, so ist die Summe der Projektionen gleich Null:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n r_i \cos \varphi_i = 0 \quad \text{und} \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n r_i \sin \varphi_i = 0 \quad (25)$$

oder die Summe der Quadrate der Projektionen minimal:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (r_i \cos \varphi_i)^2 = \text{Min} \quad \text{und} \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (r_i \sin \varphi_i)^2 = \text{Min}. \quad (27)$$

Gelang es nicht — wie es im allgemeinen der Fall ist — den geschätzten Mittelpunkt O im tatsächlichen Mittelpunkt K aufzunehmen, so führt man nach einer Reihenmessung eine Koordinatentransformation von der Größe x_K, y_K durch und zwar so, daß die Summe der Projektionen in dem neuen Koordinatensystem Null oder ihre Quadratsumme ein Minimum ergibt.

Die Projektion eines beliebigen Radius r_i ist im neuen Koordinatensystem

$$x_i^* = x_i - x_K. \quad (28)$$

Für den ersten Fall lautet die Bedingung wie folgt:

$$Q' = \sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{i=1}^n (x_i - x_K) = \text{Min}! = 0, \quad (29)$$

daraus ist

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \cdot x_K, \quad (30)$$

das heißt

$$x_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \cos \varphi_i \quad (31)$$

und in analoger Weise

$$y_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \sin \varphi_i. \quad (32)$$

Für den zweiten Fall hat die Bedingung folgende Form:

$$Q = \sum_{i=1}^n x_i^{*2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_K)^2 = \text{Min}! \quad (33)$$

Sei x_K so geändert, daß die Bedingung (33) erfüllt ist:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_K} = \frac{\partial}{\partial x_K} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i x_K + x_K^2) = 0, \quad (34)$$

daraus ist

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n x_K = 0, \quad (35)$$

folglich ist

$$x_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \cos \varphi_i \text{ usw.}, \quad (36)$$

ein Ergebnis, das mit der Gleichung (31) übereinstimmt.

Die Gleichungen (14) und (20), (16) und (19) sowie (31) und (36) miteinander verglichen beweisen, daß die Minimalisierung der Summe der linearen Abweichungen und die Methode der kleinsten Quadrate in eindimensionalen (oder auf einen eindimensionalen Fall zurückzuführenden) Fällen zu demselben, im Falle eines zweidimensionalen Punkthaufens hingegen zu wesentlich abweichenden Ergebnissen führen.

Zur Ermittlung des Radius des Regressionskreises mißt man vom neuen Mittelpunkt aus eine neue Reihe

$$r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n;$$

daraus ist der Radius des Ausgleichskreises:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i. \quad (37)$$

4. Konfidenz der geschätzten Parameter

Die Größen m , b , x_S , y_S und φ sind abgeleitete Parameter und auch selbst Zufallsgrößen, die ihre eigene Konfidenz haben.

Wird der in Bild 1 dargestellte Punkthaufen durch Projektion zu einem eindimensionalen Punkthaufen abgebildet, so kann der Ort der Regressionsgeraden als die Mitte des eindimensionalen Punkthaufens, d.h. als Mittelwert einer Meßreihe aufgefaßt werden (Abb. 4). Auch der Mittelwert streut, seine Standardabweichung ist bekanntlich

$$s_{\bar{x}} = s_{\text{Gerade}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_{\text{Punkt}}}{\sqrt{n}}, \quad (38)$$

und sein Streubereich:

$$R_{\bar{x}} = R_{\text{Gerade}} = 2 \cdot u \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot u \frac{\sigma_{\text{Punkt}}}{\sqrt{n}} = 2 \cdot u_n \cdot \sigma_{\text{Punkt}}; \quad (39)$$

worin $u_n = f(p, n)$. Ist das Konfidenzintervall der Ausgleichsgeraden vorgegeben, so läßt sich der Umfang der Meßreihe bestimmen. Sollte die Standardabweichung σ_{Punkt} der Grundgesamtheit hingegen unbekannt sein, so ist die Aufgabe nur mit Iteration zu lösen. Diese Vorfürungen sind sinngemäß auch für den Regressionskreis gültig.

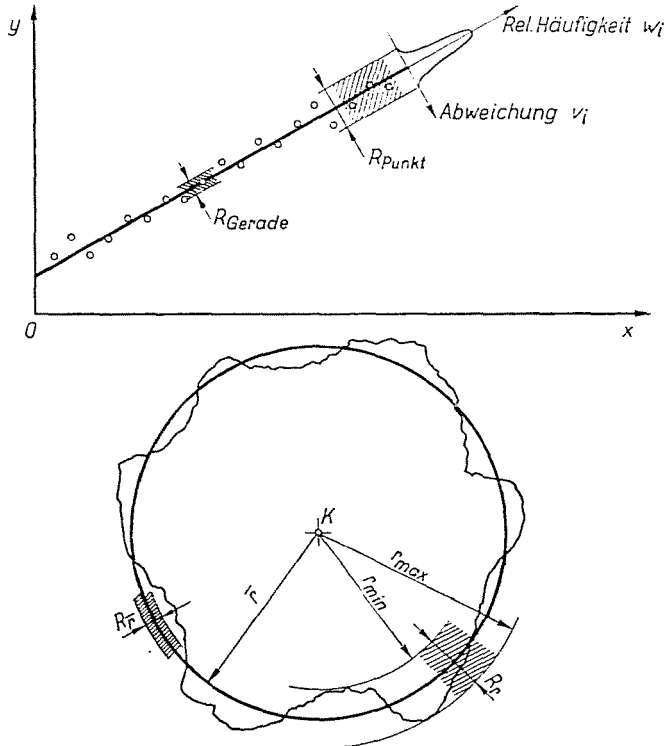


Bild. 4

Nach dem Obigen ist das Konfidenzintervall von b

$$R_b = \frac{R_{\bar{x}}}{\cos \varphi} \quad (40)$$

und die Konfidenzintervalle von $m = \tan \varphi$ bzw. von φ sind so groß, wie es das Toleranzfeld der Breite $R_{\bar{x}}$ auf der gegebenen Länge ermöglicht.

Für die Konfidenz der geschätzten Parameter der Regressionsgeraden existiert nach [13] auch eine andere Interpretation, und zwar

$$x_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \pm t_p \frac{s_x}{\sqrt{n-2}}; \quad (41)$$

$$y_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \pm t_p \frac{s_y}{\sqrt{n-2}}; \quad (42)$$

$$m = \tan \varphi \pm t_p \frac{s_\eta}{\sqrt{n-2}} \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}, \quad (43)$$

da die geschätzten Parameter einer Studentischen Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden gehorchen.

Für die Charakterisierung des Istprofils (oder der Istoberfläche) kann man beliebige weitere Verteilungskenngrößen (Streuparameter) angeben, wie z.B. die Standardabweichung, die Streuung, die durchschnittliche Abweichung, den Modalwert, die Mediane, die Grenzabweichung, die grobe Abweichung, den Variationskoeffizienten usw. Es ist zweckmäßig, die Toleranz des Profils (oder der Oberfläche) mit den angeführten Kenngrößen auszudrücken.

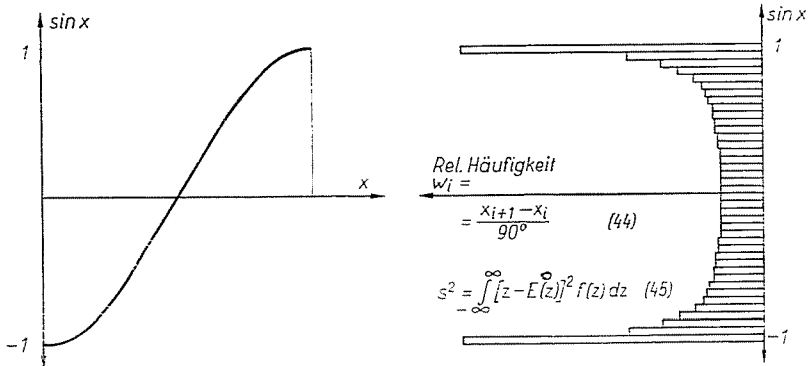


Bild. 5

Im Laufe der bisherigen Ausführungen wurde vorausgesetzt, daß der Datenhaufen normalverteilt ist. Laut des zentralen Grenzwertungsgesetzes ist diese Voraussetzung dann gerechtfertigt, wenn zahlreiche unabhängige Einflüsse zufälliger Art vorhanden sind. Wenn im gegebenen Falle auch systematische Einflüsse zur Geltung kommen, wird das Problem ziemlich kompliziert.

Als Beispiel nehmen wir den Fall, daß die systematische Einwirkung periodisch, d.h. von sinusförmigem Charakter ist. In diesem Falle sind die in gleichmäßigen Teilungen zu messenden Werte bereits überhaupt nicht normalverteilt.

Zur in Bild 5 dargestellten Sinuskurve wurde das Diagramm der relativen Häufigkeiten der in gleichmäßigen Teilungen meßbaren Meßwerte in Abhängigkeit von dem Winkelbereich aufgezeichnet. Die relative Häufigkeit wurde folgendermaßen definiert:

$$w_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{90^\circ}, \quad (44)$$

weil die Anzahl der im Bereich $y_i - y_{i-1}$ zu erwartenden Meßwerte — im Falle gleichmäßiger Teilungen — dem Verhältnis des Winkelbereiches $x_i - x_{i-1}$ und des Bereiches von 90° proportional ist.

Tabelle 1
Zahlenwerte der relativen Häufigkeiten

$\sin x_i$	$x_{i-1} - x_i$	$w_i = \frac{x_{i-1} - x_i}{90^\circ}$	
0,05	0,025	2,866	0,03184
0,10	0,075	2,873	0,03192
0,15	0,125	2,888	0,03209
0,20	0,175	2,910	0,03233
0,25	0,225	2,940	0,03267
0,30	0,275	2,980	0,03311
0,35	0,325	3,030	0,03366
0,40	0,375	3,091	0,03434
0,45	0,425	3,166	0,03517
0,50	0,475	3,256	0,03618
0,55	0,525	3,367	0,03741
0,60	0,575	3,503	0,03892
0,65	0,625	3,672	0,04080
0,70	0,675	3,885	0,04317
0,75	0,725	4,163	0,04626
0,80	0,775	4,540	0,05044
0,85	0,825	5,082	0,05646
0,90	0,875	5,946	0,06608
0,95	0,925	7,647	0,08498
1,00	0,975	18,195	0,20217

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 w_i} = 0.70431(89618);$$

$$s_3 = 2.11295(6886);$$

$$s^* = 0.72261(60078);$$

$$s_3^* = 2.16784(8023).$$

In der Tabelle 1 wurde der Werthereich von $\sin x_i$ auf 20 gleiche Teile aufgeteilt und es wurden die relativen Häufigkeiten aus den zu den einzelnen Teilbereichen gehörenden Winkelbereichen nach (44) ausgerechnet.

Auf Grund des Histogramms läßt sich die Verteilungsdichte $f(z)$ des Haufens mit deren Hilfe die Streuung auszurechnen ist, prinzipiell ermitteln:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [z - E(z)]^2 f(z) dz. \quad (45)$$

Zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau ist es noch notwendig, den Koeffizienten des Bruches s/\sqrt{n} zu kennen, um das Konfidenzintervall des Mittelwertes bestimmen zu können. Die Verteilung des Mittelwertes der vorliegenden Zufallsgröße ist aber unbekannt, man kann daher den notwendigen Umfang der Meßreihe zu einem vorgegebenen Konfidenzintervall nicht bestimmen. Die Klärung dieser Frage benötigt noch weitere Untersuchungen, nicht nur von der Seite der Meßtechniker sondern auch der Mathematiker.

5. Zusammenfassung

Mit Hilfe der vorigen Ausführungen und von zwei Beispielen wurde versucht, die Mängel der traditionellen Formprüfungsverfahren vorzuführen und denselben andere Methoden entgegenzusetzen. Da die die Punkte des Profils (oder der Oberfläche) bestimmenden Größen Zufallsgrößen sind, wurde nachgewiesen, daß diese auch nach mathematisch-statistischen Methoden behandelt werden können. Diese Methoden bieten zur Beschreibung des Profils (oder der Oberfläche) zahlreiche Kenngrößen, deren Genauigkeit beliebig zu verfeinern ist. Der notwendige Mehraufwand an Rechenarbeit läßt sich durch Anwendung des Rechners wirksam vermindern.

Literatur

1. Empfehlung Ru 156-61 der Standardisierungsorgane der sozialistischen Staaten.
2. ISO-Dokument ISO/TC 10 (Secr.-46) 71, 1962.
3. TGL 19080.
4. DIN 7182 Bl. 4. Ausg. 3.59.
5. MSZ 14001-66.
6. MACDONALD, J. A.: The Mean Plane of a Surface Plate. Munitions Supply Laboratories Report 166.
7. PROWSE, D. B.: The Calculation of the Mean Plane of a Surface Plate. D.S.L. Technical Note 73. 1964.
8. MIYAZAKI, K.: Prüfung der Ebenheit mittels Ausgleichverfahren. Bulletin of JSMG 8 (1965) H. 30.
9. PROWSE, D. B.: Die Bestimmung der mittleren Ebene einer Richtplatte. Microtechnic 21 (1967) S. 581-582.
10. KILPI, J.: Eine Ausgleichsmethode für Ebenheitsmessungen. Annals of the C.I.R.P. 18 (1970) S. 229.
11. FARKAS J.: A köralak mérésének egy matematikai statisztikai módszere. Finommechanika, 14 (1975), H. 1. S. 5-6.
12. HEGT, D.-VEDJONOV, V. M.: Zur Auswertung überzähliger Messungen bei der Bestimmung von Formabweichungen. Feingerätetechnik, 24. (1975) H. 5. S. 211-214.
13. TÓTH M.: Regressziósámítás. MKKL Méréstechnikai Közlemények, 1967. H. 4.

Dr. János FARKAS, H-1521 Budapest