

# ANALYSE VON EINIGEN MECHANISCHEN EIGENSCHAFTEN DER UNTER VERSCHIEDENEN PRODUKTIONSPARAMETERN HERGESTELLTEN PP-FILAMENTGARNE\*

Von

L. KÓCZY, F. GELEJI und K. GYARMATHY

Lehrstuhl für Textiltechnik und Leichtindustrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 30. März, 1979

Im Rahmen unserer Arbeit, die die Verbesserung einiger mechanischen Eigenschaften, besonders des elastischen Verhaltens der in der Teppichindustrie als Tuftinggarne verwendeten PP-Filamentgarne bezweckte:

— wurde der Belastungs-Formänderungsmechanismus der gekräuselten PP-Fasern analysiert, unter Bestimmung dessen annähernden mechanisch-mathematischen Modells;

— wurden einige grundlegende mechanische Kennzeichen im Rahmen der Versuchfasererzeugung der aus verschiedenen Polymerhomolog-Mischungen, bei verschiedenen Streckverhältnissen und in verschiedener Faserquerschnittsform hergestellten PP-Filamente untersucht und ausgewertet, um einen Zusammenhang zwischen den Fasereigenschaften und den Herstellungsparametern zu finden;

— wurde aufgrund unserer theoretischen Ergebnisse und Meßresultate bestrebt im Gebiet der untersuchten Produktvarianten die die günstigsten Fasereigenschaften gewährleistenden Faserproduktionsparameter zu bestimmen.

Über die einzelnen Ergebnisse dieser Arbeit soll untenfolgend kurz berichtet werden.

## 1. Untersuchung der Formänderung von gekräuselten PP-Fasern, unter Berücksichtigung der Biegebeanspruchung

Zur mechanischen Analyse wurde eine Kapillare des gekräuselten Tuftinggarns gewählt (Abb. 1/a.), wobei angenommen wurde, daß die gekräuselte Kapillare auf Einwirkung der Druckbelastung, d. h. der Biegebeanspruchung der Faser, ihre Symmetrieachse beibehaltend zusammengedrückt wird (Abb. 1/b.), d. h. die aus Filamentgarn verfertigte Schleife öffnet sich nicht.

\* Vortrag an der in Balatonkenese am 8—9. September, 1977, abgehaltenen Diskussionssitzung des Subkomitees für Faser- und Fieberphysik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

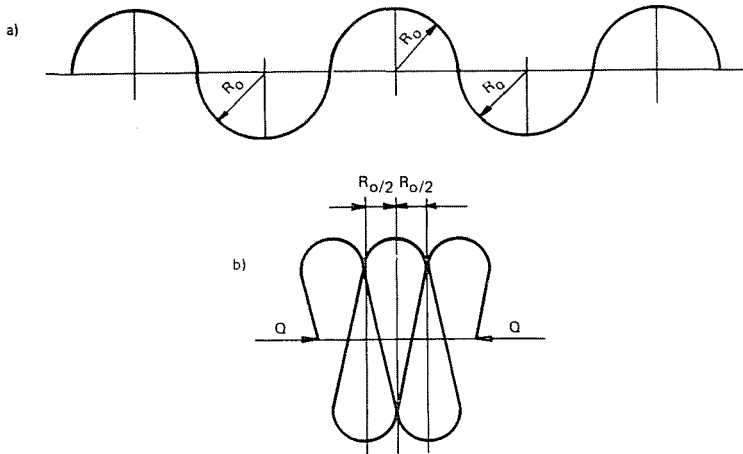


Abb. 1. Unbelastete (a) und belastete (b) gekräuselte Faser

(Bei entsprechender Stichtichte haben die eng sich aneinanderfügenden Schleifen tatsächlich wenig „Öffnungsmöglichkeit“.) In zusammengepreßtem Zustand ändern sich die Krümmungsradien der Elemente von Radius  $R_0$ , sie verringern sich bedeutend; der kleinste Krümmungsradius befindet sich an den äußeren Enden, wo der Wert des die Fasern belastenden Biegemomentes am größten ist.

Wegen der Symmetrie wurde in der Belastungs-Formänderungsanalyse das in weiterem an seinem Ende  $A$  als eingespannt zu betrachtende viertelkreisbogenförmige Faserstück von Länge  $l = \frac{R_0\pi}{2}$  untersucht (Abb. 2.).

Es wurde angenommen, daß sich die Länge  $l$  des Elements während der Belastung und der Formänderung nicht geändert hat und daß der Krümmungsradius des mit Kraft  $Q$  belasteten Querschnittes unverändert  $R_0$  geblieben ist.

Die Krümmung  $G = 1/R$  des Bogenelements  $ds$  von Koordinaten  $(x, y)$  des mit Kraft  $Q$  belasteten, gekrümmten Viertelkreisbogens ist

$$G = \frac{d\vartheta}{ds} \quad \text{bzw.} \quad G = G_0 + \frac{Qx}{IE},$$

wobei der Parameter  $\vartheta$  den von der Tangente des Bogenelements mit der positiven Richtung der Achse  $x$  eingeschlossenen Winkel bedeutet. Unter Verwendung der Bezeichnung  $\alpha^2 = Q/(IE)$  ergibt sich aus den beiden Gleichungen

$$G(\vartheta) = \sqrt{G_0^2 + 2\alpha^2(\sin \vartheta + \sin \vartheta_0)}.$$

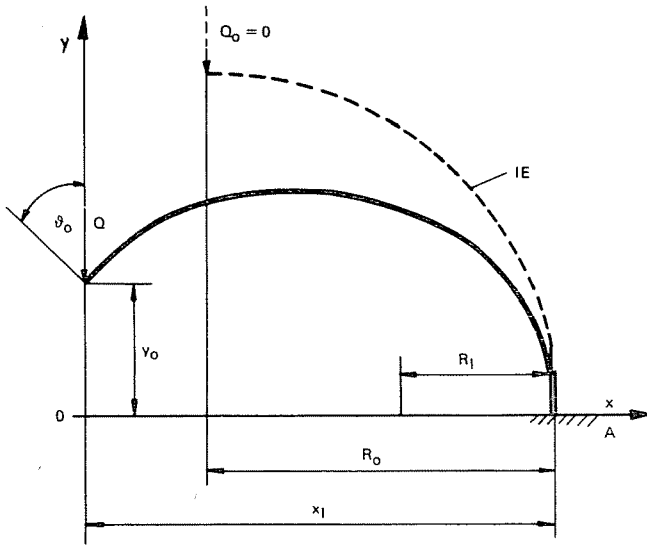


Abb. 2. Bogenteil der belasteten Faser

An Ort  $A$  beträgt die Krümmung

$$G_l^2 = G_0^2 + 2\alpha^2 (1 + \sin \vartheta_0). \quad (1)$$

Da  $d\vartheta/ds = G(\vartheta)$  bekannt ist, erhält man nach Integrierung und Substitution der Randbedingungen das elliptische Integral

$$\alpha l = \int_{-\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a + 2 \sin \vartheta}}$$

wo

$$a = \left(\frac{G_0}{\alpha}\right)^2 + 2 \sin \vartheta_0.$$

Auf die Veränderliche  $y$  gelöst:

$$\alpha y_0 = \int_{-\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{a + 2 \sin \vartheta}},$$

dessen Lösung ergibt

$$y_0 = \frac{1}{G_l} \left\{ 2 \mathcal{F}(\xi_0, k) - \frac{G_l^2}{\alpha^2} [\mathcal{F}(\xi_0, k) - \mathcal{E}(\xi_0, k)] \right\}, \quad (2)$$

wo  $\mathcal{F}(\xi_0, k)$  und  $\mathcal{E}(\xi_0, k)$  elliptische Integrale erster bzw. zweiter Art sind. Ihr Modul ist  $k = 2\alpha/G_1$ , ihre Amplitude  $\xi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \vartheta_0}{2}}$ .

Derart schafft Gleichung (2) einen Zusammenhang zwischen der Biegebeanspruchung und der Formänderung der gekräuselten Fasern. Diese Gleichung wurde im Laufe unserer späteren Analysen verwendet. (Der Algorithmus zur Lösung der Gleichung an einer Rechenmaschine ist aus Fließbild 15 des Anhangs ersichtlich. (Bei den Berechnungen wurde in Betracht gezogen, daß die Feinheit der Kapillaren der in der Teppichindustrie verwendeten PP-Filamentgarne,  $T_d = 15 \text{ den}^*$ , während ihre Gekräuseltheit durch  $R_0 \approx 1 \text{ mm}$  charakterisiert ist.

Die zahlenmäßige Analyse des Zusammenhanges Biegebeanspruchung—Formänderung wurde in einem großen Teil der Fälle für die Berührungsstelle der Faserbogen vorgenommen (Abb. 1/b.). Dieser Formänderungszustand wurde *Grenzdeformation* genannt, da die von uns bestimmten Zusammenhänge nur bis zu dieser Fasernformänderung gültig sind.

## 2. Einige mechanische Eigenschaften der aus verschiedenen Polymerhomologmischungen hergestellten PP-Fasern

Zur Verbesserung der mechanischen Eigenschaften von PP-Filamentgarnen wurde dem zur Faserbildung üblich verwendeten niedermolekularen Polymer ( $D$ ) ein hochmolekulares Polymerhomolog ( $H$ ) beigemischt, das in sich allein zur Faserbildung ungeeignet ist. Die derart hergestellten Probevarianten sind in Tabelle 1 angeführt.

Aus den Homologgemischen wurden die Fasern bzw. Filamente mit einem Verstreckungsverhältnis von 1:3; 1:3,5; 1:4 und 1:5 hergestellt.

Abb. 3. zeigt die Änderung der einzelnen mechanischen Kennwerte der mit einem Verstreckungsverhältnis von 1:4 erzeugten Fasern in Funktion des H-Homologgehaltes.

Es kann eindeutig festgestellt werden, daß ein größerer Anteil der hochmolekularen Komponente die Festigkeit, den Anfangsmodul und den dynamischen Modul erhöht, die Zerreidehnung hingegen verringert. (Auch bei den mit anderem Streckverhältnis hergestellten Fasern wurden die selben Tendenzen beobachtet. Eine Erhöhung der Verstreckung hatte die gleiche Wirkung wie die Erhöhung des  $H$ -Gehaltes.)

Abb. 4. und 5. veranschaulichen die Wirkung des  $H$ -Gehaltes (und der Verstreckung) auf die Deformabilität der Fasern, bzw. auf das Verhalten der

\* Dies bedeutet bei einer spezifischen Masse von  $\gamma = 0,9 \text{ g/cm}^3$  eine Querschnittsoberfläche von  $A = 186 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2$ .

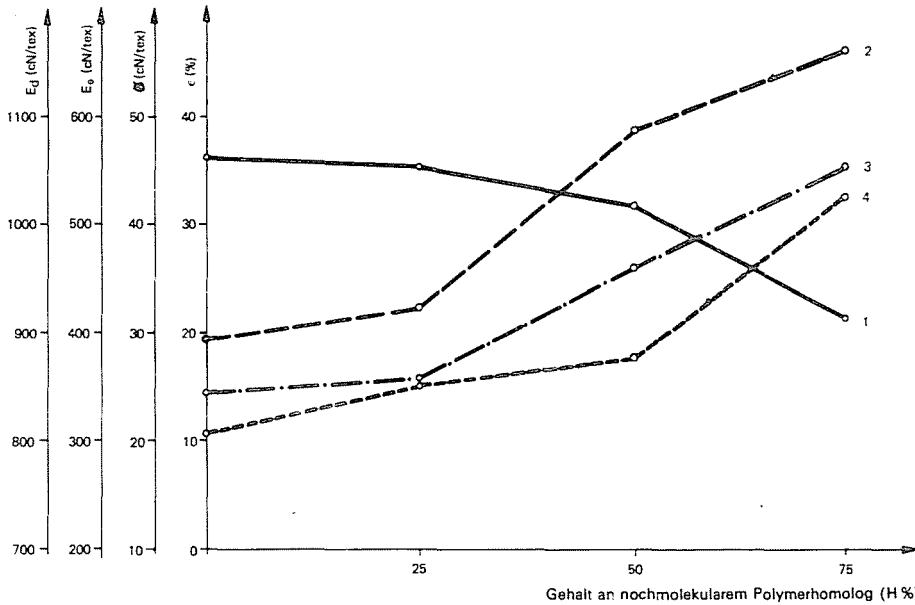


Abb. 3. Einfluß des hochmolekularen Polymerhomologgehalts auf die einzelnen mechanischen Kennzeichen der mit einem Streckverhältnis von 1:4 erzeugten PP-Filamente; 1  $E_d$  (cN/tex) dynamischer Modul; 2  $\delta$  (cN/tex) spezifische Zugfestigkeit; 3  $\epsilon$  (%) Zerreidehnung; 4  $E_0$  (cN/tex) Anfangsmodul

Tabelle 1

Die den Grundstoff der experimentellen Fasern bildenden Homologgemische

Zeichen der Probe	Komponente von		Melt index des Gemisches
	üblichem D%	hohem H%	
	Molekulargewicht		
A	100	0	16,5
B	75	25	8,8
C	50	50	5,3
D	25	75	2,6

bleibenden Dehnungskomponente bei gegebener Belastung. Die Abbildungen zeigen, daß die Deformabilitt der Fasern mit anwachsendem H-Gehalt (und höherer Verstreckung) abnimmt (der Modul wächst) und daß der absolute Wert der bleibenden Dehnungskomponente auch bedeutend abnimmt. Die Elastizität der Fasern wird folglich durch die Beimischung des hochmolekularen Polymerhomologs erhöht.

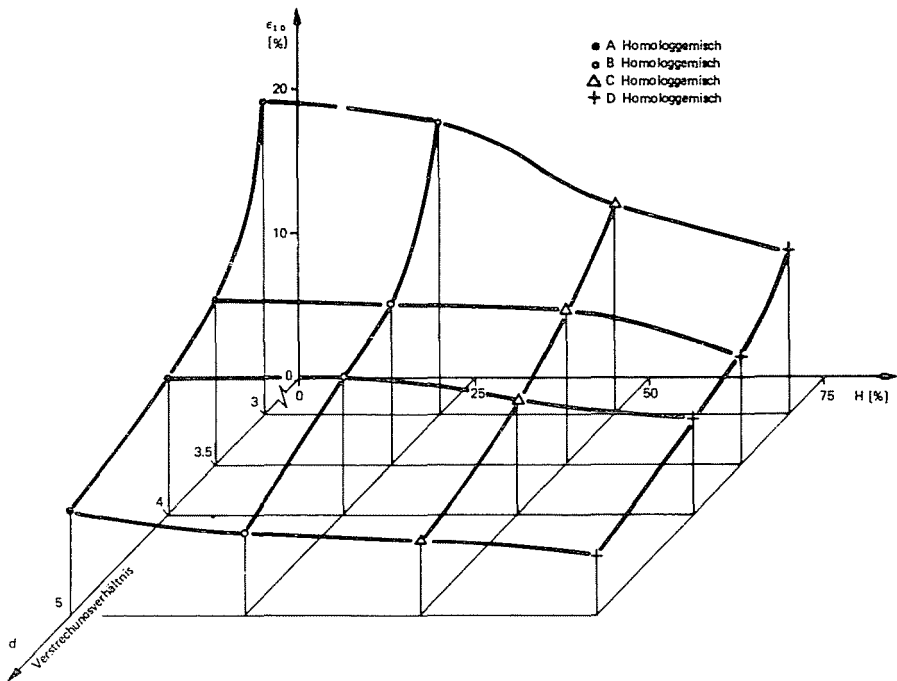


Abb. 4. Dehnung der Proben ( $\epsilon_{10}$ ) auf Einwirkung einer spezifischen Belastung von  $F = 10$  cN/tex; ● Probe „A“; ○ Probe „B“; △ Probe „C“; + Probe „D“

Der Einfluß des  $H$ -Gehalts auf den Biegebeanspruchung—Formänderungszusammenhang der Fasern wird in Gleichung 2 durch die Änderung des Moduls  $E$  erfaßt.

### 3. Biegesteifigkeit der in verschiedenen Faserquerschnittsformen hergestellten PP-Filamente

Aus den Polymerhomologgemischen wurden Proben von verschiedenen Faserquerschnittsformen (kreisförmig, dreieckig,  $I$ ,  $Y$ ) hergestellt; die Feinheit der Kapillaren sämtlicher Versuchsfilamente betrug  $T_d = 15$  den. Mit der Profilierung wurde im wesentlichen das Trägheitsmoment ( $I$ ) der Fasern und somit ihre Biegesteifigkeit sowie die Raumauffüllung der Fasern erhöht.

Da die Zahl der hergestellten Profilvarianten relativ klein war, wurde im Laufe der theoretischen Analysen eine bedeutend weitere, besonders in bezug auf geometrische Abmessungen abweichende Skala der möglichen Faserpro-

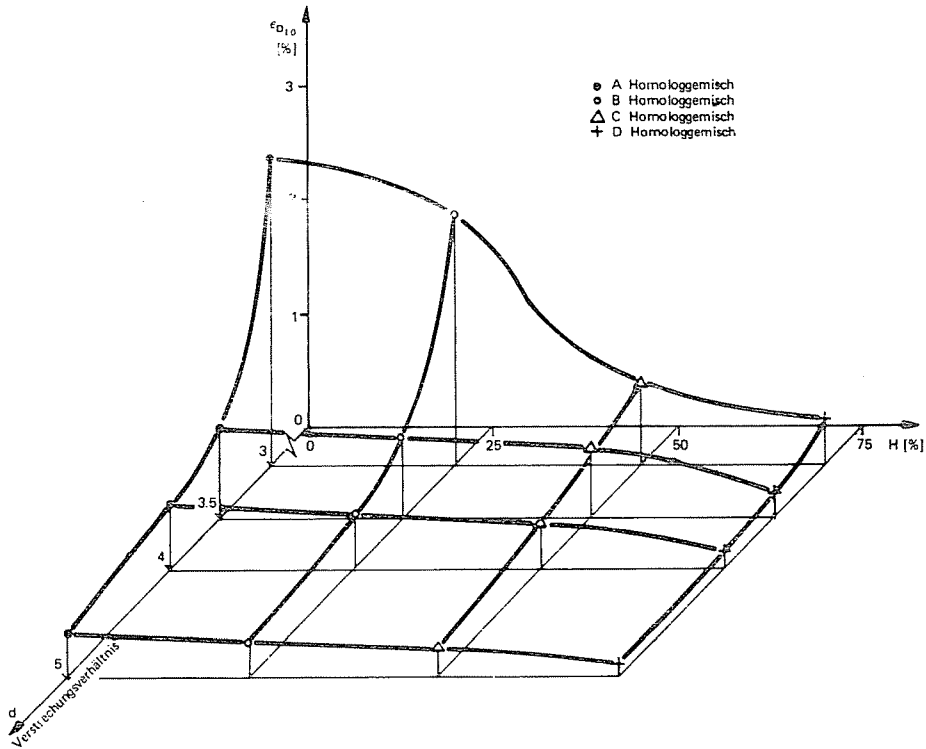
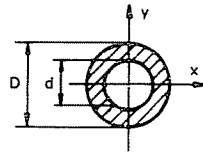


Abb. 5. Die bei einer spezifischen Belastung von  $F = 10 \text{ cN/tex}$  auftretende bleibende Dehnung ( $\epsilon_{p,10}$ );  
 ● Probe „A“; ○ Probe „B“; △ Probe „C“; + Probe „D“

file untersucht. Die eingehender analysierten Fasernquerschnittsformen sind aus Abb. 6. ersichtlich.\*

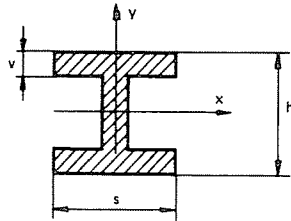
Abb. 7—9. wurden aufgrund der Gleichung 2 unter Berücksichtigung der für verschiedene Homologgemische gemessenen Modulwerte ( $E$ ) konstruiert. Die Abbildungen zeigen die Belastbarkeit ( $Q_e$ ) der aus verschiedenen Homologgemischen hergestellten Fasern mit Kreisring  $H$ - und  $Y$ -Querschnitten von verschiedenen geometrischen Abmessungen in einer Stellung, in der sich die Faserbogen berühren, d. h. bei Grenzdeformation. (Abb. 1/b.) Der Einfluß der Faserprofilform, sowie ihrer geometrischen Abmessungen und des Homologgemisches die zur Fasererzeugung verwendet wurde, ist aus den Abbildungen klar ersichtlich. Die Belastbarkeit ( $Q_e$ ) der aus Gemischen von höherem  $H$ -Gehalt erzeugten Fasern im Zustand der Grenzdeformation ist

\* Überlegungen in Verbindung mit der Ausbildung der die Bedingung  $I_x = I_y$  befriedigenden  $H$ -Profilform sind in Punkt „b“ des Anhangs enthalten.



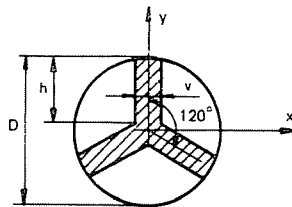
$$I_x = I_y = \frac{d^4 \pi}{64} (\kappa^4 - 1)$$

$$\kappa = \frac{D}{d}$$



wahl von  $h/s$  da $\beta$   
 $I_x = I_y$  betrage

$$I_y = \frac{1}{12} [2 v s^3 + (h - 2 v) v^3]$$



$$I_x = I_y = \frac{v^4}{96} (24 \alpha^3 + \sqrt{3})$$

$$\alpha = \frac{h}{v}$$

Abb. 6. Querschnittsformen der untersuchten Fasern

höher, d. h. die aus diesen Gemischen erzeugten Fasern gewährleisten im Zustand der Grenzdeformation bei einem kleineren Trägheitsmoment eine gegebene Belastbarkeit (Abb. 10.).

#### 4. Elastisches Verhalten der aus verschiedenen Homologgemischen erzeugten profilierten PP-Fasern

Bei der Analyse des elastischen Verhaltens von profilierten Fasern unter Biegebeanspruchung muß in Betracht gezogen werden, daß man mit zwei entgegengesetzten Wirkungen der Profilierung zu rechnen hat:

— zufolge ihres größeren Trägheitsmoments ist die profilierte Faser „steifer“, so daß bei Biegebeanspruchung eine kleinere Formänderung stattfindet (in unserem Fall: der Ausgangs-Krümmungsradius  $R_0$  nimmt weniger ab), als bei der Normalfaser. Da bei sonst identischen Bedingungen eine kleinere Formänderung von einer kleineren bleibenden Formänderung begleitet wird, ist diese Eigenschaft offensichtlich vorteilhaft;

— gleichzeitig ist es eine ungünstige Erscheinung, daß profilierte Fasern mit größeren Querabmessungen — unter Berücksichtigung einer identischen



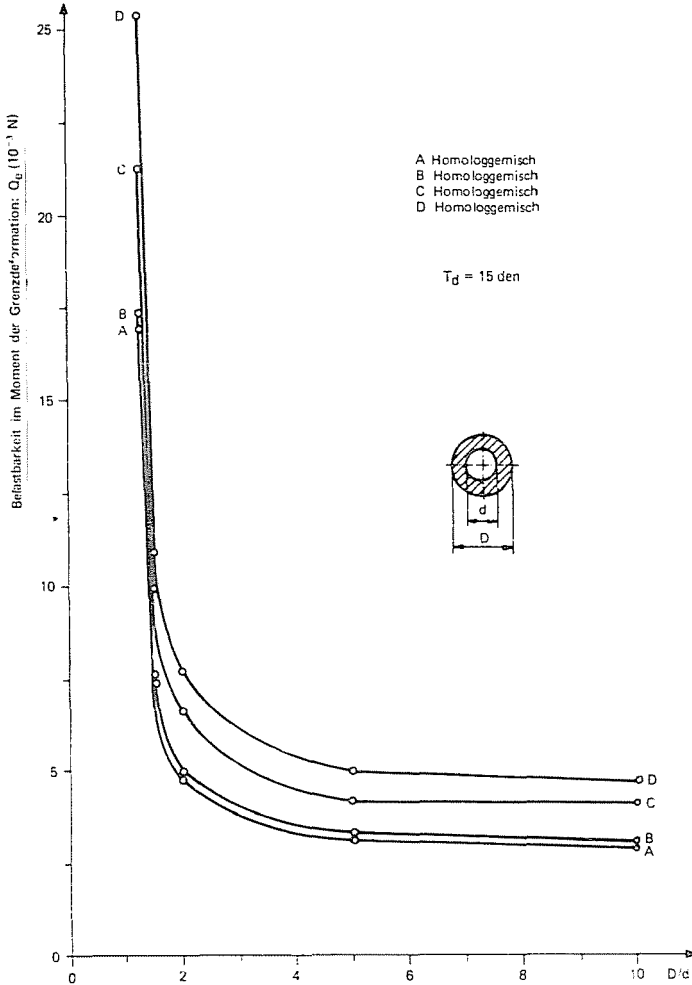


Abb. 7. Belastbarkeit ( $Q_d$ ) der Fasern mit Kreisring-Querschnitt im Moment der Grenzdeformation (Verstreckungsverhältnis 1:4)

Biegeformänderung — in ihren einzelnen Teilen stärker deformiert werden (sich verlängern oder zusammenpressen), als die Normalfasern.

Unter gleichzeitiger Berücksichtigung der beiden entgegengesetzten Wirkungen wurde die Dehnung der im mechanischen Sinne genommenen „äußersten Fasern“ ( $e$ ) beiden profilierten Fasern untersucht.

Abb. 11. zeigt die Dehnung ( $\epsilon_e$ ) der „äußersten Faser“ der über verschiedene Profilformen und Trägheitsmomente verfügenden Fasern von  $T_d = 15 \text{ den}$  in Stellung der Grenzdeformation. (Bei der Berechnung wurde in

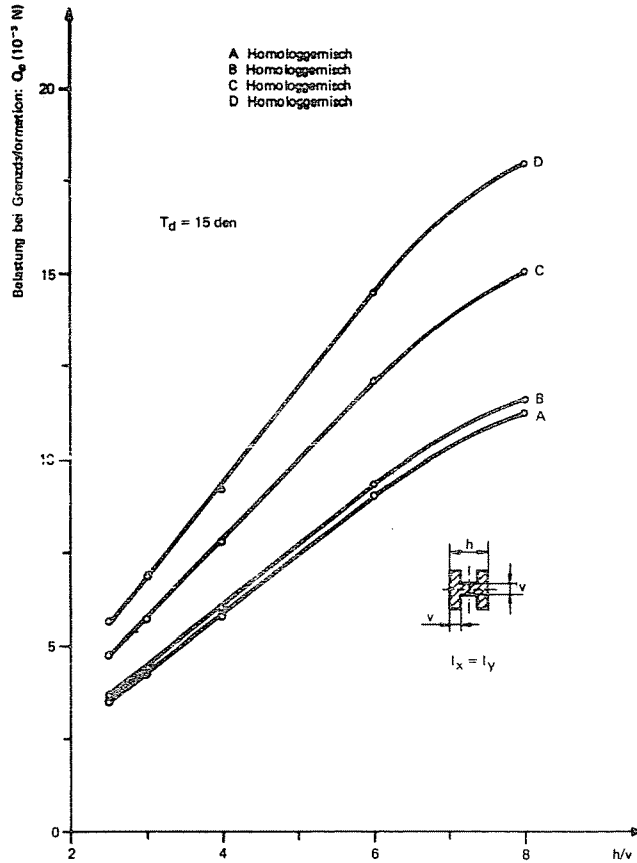


Abb. 8. Belastbarkeit ( $Q_d$ ) der Fasern mit  $H$ -Querschnitt im Moment der Grenzdeformation (Verstreckungsverhältnis 1:4)

Betracht gezogen, daß die Kräuselung der in der Teppichindustrie verwendeten Fasern durch den Wert  $R_{\text{cr}} = 1 \text{ mm}$  charakterisiert ist.)

Aus Abb. 11. ist ersichtlich, daß bei identischem Trägheitsmoment d. h. bei identischer Belastbarkeit, über eine gewisse Grenze bei Kreisring-Querschnitt die kleinste Dehnung ( $\epsilon_c$ ) der „äußersten Faser“ wahrzunehmen ist und daher annehmbar auch die kleinste bleibende Deformation; diesem Profil folgt die Faser von  $Y$ , sodann die von  $H$ -Querschnitt. Es ist weiterhin interessant zu beobachten, daß unterhalb eines gewissen Trägheitsmomentwertes (d. h. Belastbarkeit) eben der Kreisring-Querschnitt der ungünstigste ist, denn dieser gibt die größte Dehnung der äußersten Faser. (Aufgrund dieser Befunde ergibt sich von selbst der Gedanke, daß es eventuell zweckmäßig wäre, Teppiche von verschiedener Stichtichte und Enge, die daher inbezug auf die

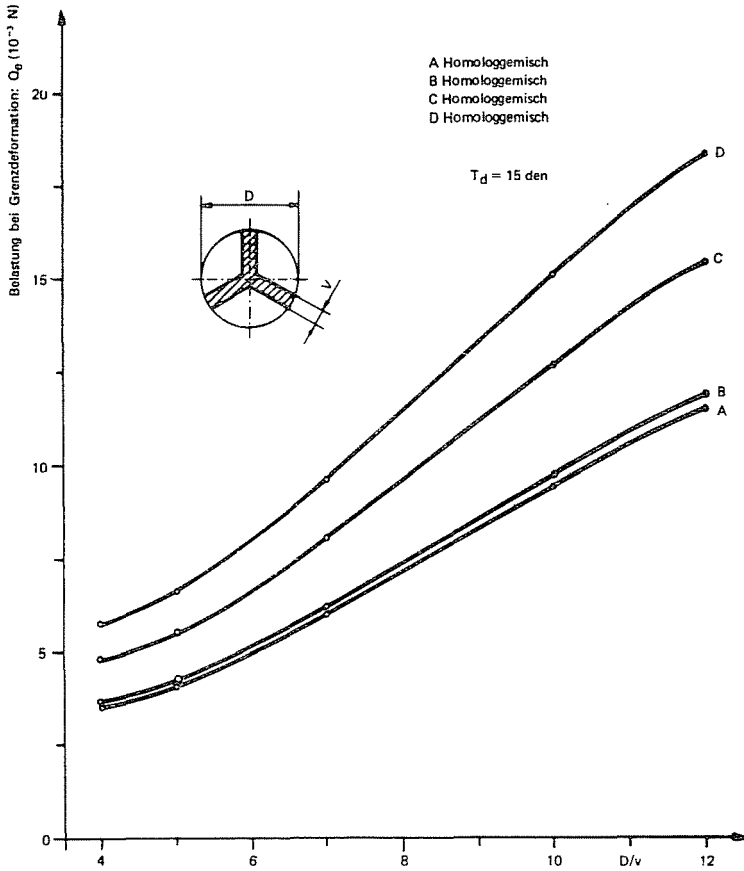


Abb. 9. Belastbarkeit ( $Q_g$ ) der Fasern mit Y-Querschnitt im Moment der Grenzdeformation (Verstreckungsverhältnis 1:4)

Inanspruchnahme ihrer einzelnen aufbauenden Fasern verschiedenen Belastungen ausgesetzt sind, aus Fasern von verschiedenen Profilformen herzustellen.)

Aufgrund der Daten der Abb. 10. und 11. wurde der Zusammenhang zwischen Belastbarkeit und Dehnung der „äußersten Faser“ der aus verschiedenen Homologgemischen mit verschiedenen Profilen erzeugten PP-Filamente von  $T_d = 15 \text{ den}$  Feinheit in Grenzdeformationsstellung bestimmt (Abb. 12—14.). Unsere Resultate weisen eindeutig darauf hin, daß die Dehnung der „äußersten Faser“ der profilierten Fasern bei gleicher Belastung kleiner ist, so daß es zu erwarten ist, daß auch ihr elastisches Verhalten günstiger ist.

Im Rahmen unserer Untersuchungen wurden die Werte der Dehnung und der bleibenden Dehnungskomponente für aus verschiedenen Homologge-

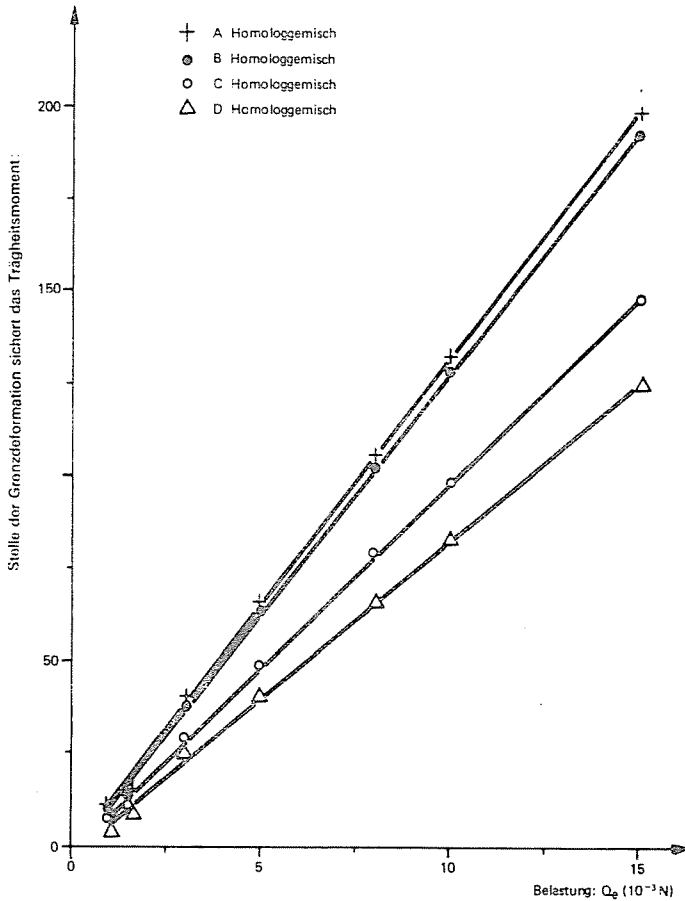


Abb. 10. Der Wert des zur Sicherung einer gegebenen Grenzdeformation benötigten Trägheitsmoments bei verschiedenen Belastungen (unter Berücksichtigung von mit 4-facher Verstreckung hergestellten Fasern von 15 den Feinheit)

mischen aufgebauten und mit verschiedenen Verstreckungen erzeugten PP-Filamentproben bei Verwendung von verschiedenen Streckbeanspruchungen bestimmt (Abb. 4. und 5. zeigen solche Resultate). Es bot sich somit eine Möglichkeit den gegenseitigen Zusammenhang der gesamten Dehnung ( $\epsilon$ ), der bleibenden Dehnungskomponente ( $\epsilon_p$ ), des Streckverhältnisses ( $d$ ) und des hochmolekularen Polymergehalts ( $H$ ) zu analysieren.

Im Rahmen der Analyse des stochastischen Zusammenhangs der aufgezählten Parameter wurden zuerst die gewöhnlichen paarweisen Korrelationskoeffizienten berechnet, in Matrix geordnet und die Korrelationsmatrix dargestellt. Aufgrund der Korrelationsmatrix wurde dann der Wert des für den

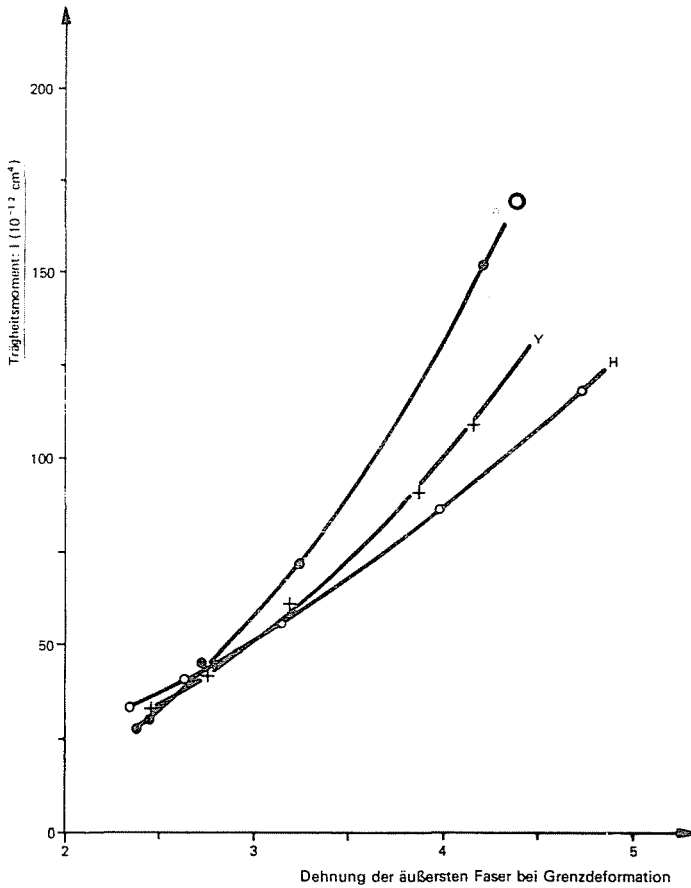


Abb. 11. Dehnung der äußersten Faser im Zustand der Grenzdeformation im Falle von verschieden profilierten Fasern von  $R_0 = 1$  mm Kräuselung und 15 den Feinheit in Abhängigkeit von der Änderung des Trägheitsmoments

stochastischen Zusammenhang der bleibenden Dehnungskomponente ( $\epsilon_p$ ) und der übrigen Veränderlichen charakteristischen totalen Korrelationskoeffizienten ( $\rho$ ), sodann unter Eliminierung der Wirkung aller übrigen Veränderlichen, je charakteristische Paare die partiellen Korrelationskoeffizienten berechnet. Schließlich wurde die Gleichung der den stochastischen Zusammenhang der vier untersuchten Parameter angehenden Hyperfläche bestimmt.

Der berechnete Wert des totalen Korrelationskoeffizienten beträgt

$$\rho = 0,909,$$

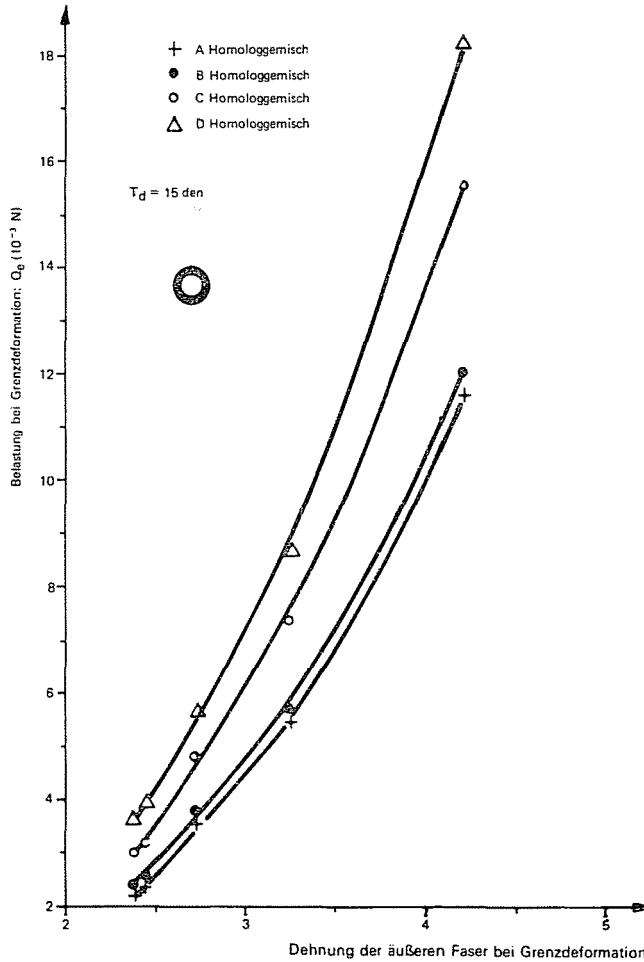


Abb. 12. Belastbarkeit der mit 4-facher Verstreckung hergestellten Fasern von Kreisring-Querschnitt in Abhängigkeit der in Grenzdeformationsstellung auftretenden Dehnung ( $\epsilon_e$ ) der äußeren Faser

was auf einen sehr guten stochastischen Zusammenhang der untersuchten Veränderlichen ( $\epsilon_p$ ,  $\epsilon$ ,  $d$ ,  $H$ ) hinweist, so daß die Aufstellung (und Verwendung) der Regressionsfunktion angebracht ist. Die bestimmte Gleichung der Regressions-Hyperfläche ist:

$$\epsilon_p (\%) = 0,246\epsilon (\%) + 0,390d (-\text{mal}) - 0,004 H (\%) - 3,061 \quad (3)$$

Der hohe Wert des totalen Korrelationskoeffizienten weist darauf hin, daß in Kenntnis der Dehnung ( $\epsilon$ ) bzw. der Beanspruchung, sowie des Streckver-

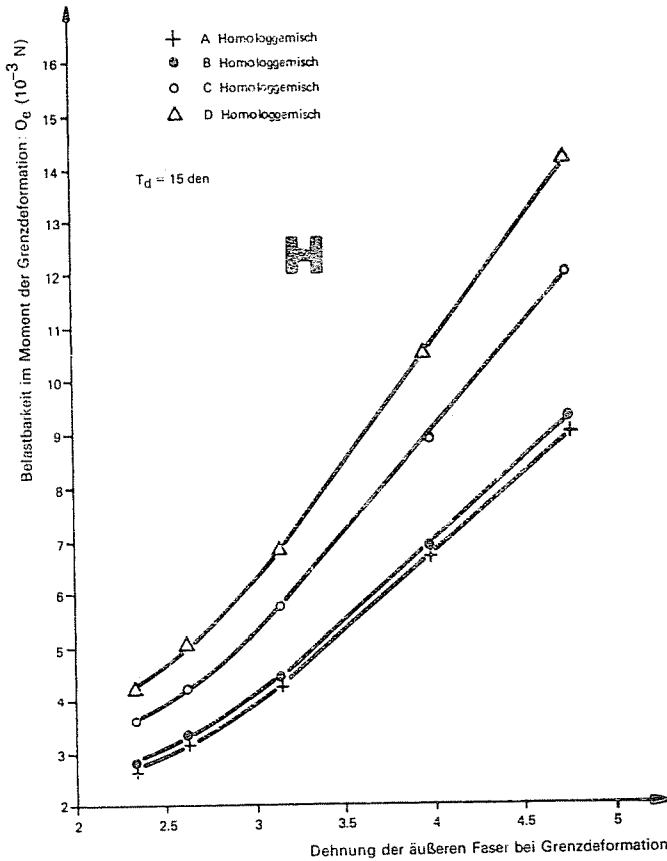


Abb. 13. Belastbarkeit der mit 4-facher Verstreckung hergestellten Fasern von  $H$ -Querschnitt in Abhängigkeit der in Grenzdeformationsstellung auftretenden Dehnung ( $\epsilon_e$ ) der äußeren Faser

hältnisses der Fasern ( $d$ ) und ihres hochmolekularen Homologgehaltes ( $H$ ) unter Verwendung der Gleichung 3 mit guter Wahrscheinlichkeit auf den zu erwartenden Wert der bleibenden Dehnungskomponente gefolgert werden kann. Derart kann auch die bleibende Dehnung geschätzt werden, die von den in den obigen Abbildungen dargestellten Dehnungen der „äußersten Faser“ verursacht wird.

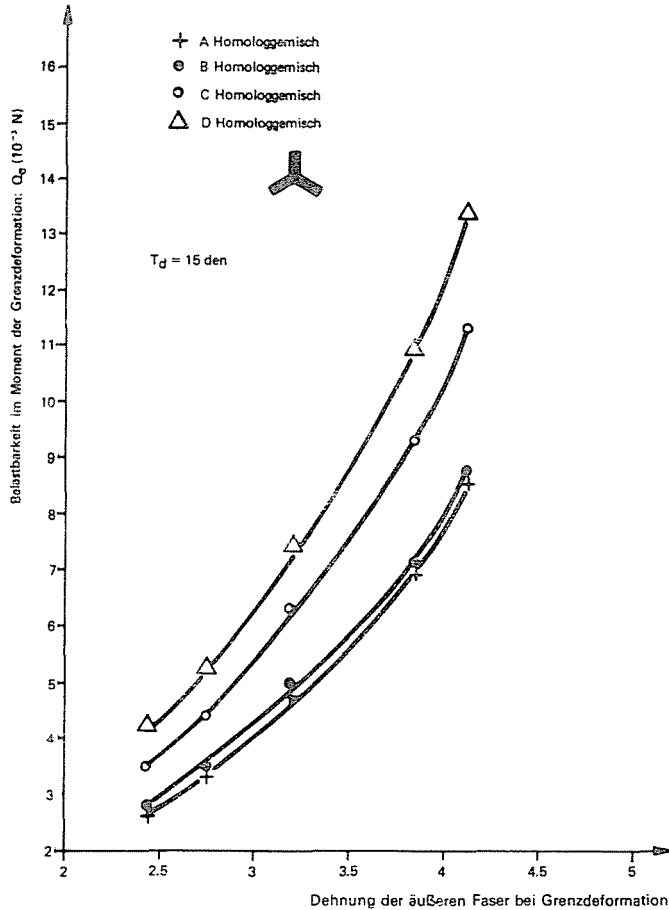


Abb. 14. Belastbarkeit der mit 4-facher Verstreckung hergestellten Fasern von Y-Querschnitt in Abhängigkeit der in Grenzdeformationsstellung auftretenden Dehnung ( $\epsilon_g$ ) der äußeren Faser

### Zusammenfassung

Im Rahmen der Forschungsarbeit wurden einige mechanische Eigenschaften von Polypropylen-Filamentgarnen untersucht, die als Tuftinggarne in der Teppichindustrie verwendet werden. Aus verschiedenen Polymerhomolog-Gemischen wurden Versuchsfasern von verschiedenen Querschnittsformen hergestellt. Es wurde gefunden, daß die elastischen Eigenschaften der Fasern durch das Beimischen von hochmolekularen Homologen vorteilhaft beeinflußt werden. Es wurde ferner festgestellt, daß die aus dem Gesichtspunkt der Verwendung wichtigen elastischen Eigenschaften durch die Profilierung des Faserquerschnittes verbessert werden können.



## Literatur

- 1 KÓCZY, L.: Új típusú szintetikus szálak reológiai tulajdonságainak elemzése (Analyse der rheologischen Eigenschaften von Fasern neuartigen Typs). Forschungsschlußbericht, Budapest, Mai 1977.
- 2 GELEJI, F.—KÓCZY, L.—FULÖP, I.—BODOR, G.: Properties of polypropylene fibres made from polymer homologous mixtures. Vortrag an der 5. Europhysics Conference (Budapest, April 1976).
- 3 BYRD, P. F.—FRIEDMAN, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Springer Verlag (Berlin—Göttingen) 1961.

Dr. László KÓCZY

Dr. Frigyes GELEJI

Dr. Kálmán GYARMATHY

H-1521 Budapest

## ANHANG

a) Flußbild des Rechenprogramms Lösungsalgorithmus der elliptischen Integrale erster und zweiter Ordnung enthaltenden Gleichung unter besonderen Bedingungen. Der Algorithmus ist aus Flußbild 15 (Abb. 15.) ersichtlich.

Rechenzeit des Programms: 4'34". Das mit (\*) bezeichnete mathematische Verfahren bestimmt die elliptischen Integrale erster und zweiter Ordnung gleichzeitig aufgrund des rekursiven Algorithmus, mitgeteilt von DiDONATO, A. R., HERSHEY, A. V.: Nero Formulae for Computing Incomplete Elliptic Integrals of the First and Second Kind, erschienen in Journal ACM, 1959, 6, pp. 4—6, nach dem von AGAJEW, M. J., ALIK, V. P., MARKOW, YU. Y.: Biblioteka algoritmov 51b—100b in Sovietskoje Radio, 1976, pp. 40—44 beschriebenem Programm.

b) Ausbildung der in der Richtung ihrer beiden Hauptsymmetrieachsen über identische Biegesteifigkeit verfügenden Fasern mit H-Profil.

Zur Erzielung einer identischen Biegesteifigkeit ist es nötig, daß die Trägheitsmomente übereinstimmen sollen, d. h. daß  $I_x = I_y$  sei.

Da unter Berücksichtigung der Bezeichnungen in Abb. 6. die Trägheitsmomente:

$$I_x = \frac{v \cdot h^3}{12} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(s-v)v^3}{3} + (s-v)v \cdot h - v^2 \right] \quad (1)$$

und

$$I_y = \frac{1}{12} [2v \cdot s^3 + (h-2v)v^3] \quad (2)$$

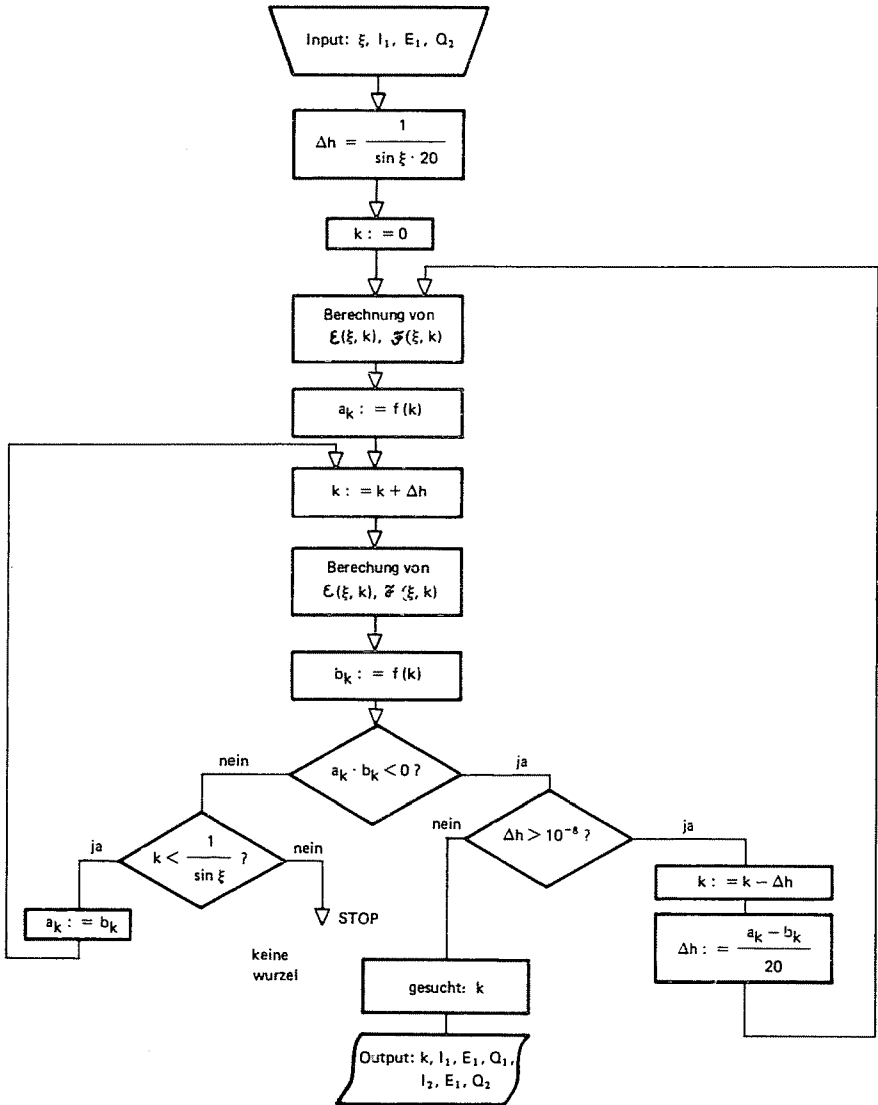


Abb. 15. Flußbild des Rechenprogramms: 1 Suchintervall von  $k$ ; 2 (da  $k \cdot \sin \xi \leq 1$ ); 3 Berechnung von  $\varepsilon(\xi, k), \zeta(\xi, k)$ ; 4 nein; 5 ja; 6 keine Wurzel; 7 die gesuchte Wurzel:  $k$

Tabelle 2

Das die Bedingung  $I_x = I_y$  erfüllende  $h/s$  Verhältnis  
bei verschiedenen  $h/v$  Werten

$h/v$	$A(h)$	$B(h)$	$s/v$	$h/s$
2,5	-0,008	0,129	2,78	0,90
3	0,000	0,077	3,60	0,83
4	-0,107	0,036	5,37	0,74
6	-0,395	0,013	8,9	0,67
8	-0,710	0,0067	12,5	0,64

sind, müssen unter den Ausgangsbedingungen auch die Zusammenhänge (1) und (2) gleich sein, so daß wenn „ $v$ “ als Einheit genommen wird, aufgeschrieben werden kann:

$$\frac{h^3}{12} + \frac{1}{2} \left[ \frac{s-1}{3} + (s-1)(h-1)^2 \right] = \frac{1}{12} [2s^3 + (h-2)] \quad (3)$$

Gl. (3) gibt nach Ordnen — und da es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt — in einer für Annäherungslösung von iterativem Charakter geeigneten Form ausgedrückt:

$$s = \frac{h - h^3 + 6(h-1)^2}{2 + 6(h-1)^2} + \frac{1}{1 + 3(h-1)^2} \cdot s^3 \quad (4)$$

Gleichung (4) soll kurz folgend bezeichnet werden:

$$s = A(h) + B(h)s^3 \quad (5)$$

Für verschiedene Werte von „ $h$ “ wurden die Koeffizienten  $A(h)$  und  $B(h)$  bestimmt, sodann wurde nach annähernder Lösung der Gleichung der Wert des die Ausgangsbedingungen befriedigenden Verhältnisses  $h/s$  ausgedrückt (Tabelle 2).

Bemerkung: Aufgrund der Daten in Tabelle 2 erschien es als wahrscheinlich, daß im Falle von  $h \rightarrow \infty$  der Quotient  $h/s$  konvergiert, so daß auch dieses Problem untersucht wurde.

Im Sinne des Zusammenhanges (4) ist:

$$s = \frac{h - h^3 + 6(h-1)^2}{2 + 6(h-1)^2} + \frac{1}{1 + 3(h-1)^2} s^3$$

woraus man nach Transformierung und Einführung der Bezeichnung  $q = s/h$

$$s = q \cdot h = \frac{h - h^3 + 6(h-1)^2}{2 + 6(h-1)^2} + \frac{1}{1 + 3(h-1)^2} \cdot (q \cdot h)^3 \quad (6)$$

und

$$q = \frac{h - h^3 + 6(h-1)^2}{2h + 6h(h-1)^2} + \frac{h^2}{1 + 3(h-1)^2} \cdot q^3 \quad (7)$$

erhält.

Der Grenzübergang  $h \rightarrow \infty$  wird an beiden Seiten der Gleichung vorgenommen. (Dies ist mit dem Fall  $v \rightarrow 0$  äquivalent.)

Die Bezeichnung  $\lim q = q_\infty$  wird eingeführt. Dies ergibt für Gleichung (7) bei Grenzwert:\*

$$q_\infty = -0,167 + 0,333 q_\infty^3 \quad (8)$$

Die annähernde Lösung der Gleichung (8) ist

$$q_\infty = 1,75$$

woraus:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (h/s) = 0,57 \quad (9)$$

\* Unter Berücksichtigung, daß der Grenzwert der Summe der Summe der Grenzwerte der Glieder, der Grenzwert des Produkts dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren gleich ist (falls solche existieren), ferner daß:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot h^n + a_{n-1} \cdot h^{n-1} + \dots + a_0}{b_n \cdot h^n + b_{n-1} \cdot h^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$