PERIODICA POLYTECHNICA SER. MECH. ENG. VOL. 36, NO. 3-4, PP. 181-190 (1992)

KONSTRUKTION DES REGULÄREN SIEBZEHNECKS MIT LINEAL UND STRECKENÜBERTRAGER

GY. STROMMER

Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest

Eingegangen: am November 16. 1992.

Abstract

In 1899 D. Hilbert proved that regular polygons that can be constructed with a ruler and a pair of compasses can also be constructed by using a ruler and a gauge. However, the procedure for the construction of the regular settimdecagon by these tools could be described only more than 90 years later (see [2] and [3]). Since that time we succeeded to simplify the construction. In this paper we present the construction of the regular settimdecagon in this simpler form.

Keywords: regular settimdecagon, geometrical construction.

D. Hilbert hat im Jahre 1899 in seiner berühmten Festschrift 'Grundlagen der Geometrie' bewiesen, daß diejenigen regulären Vielecke, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, notwendigerweise mit Lineal und Streckenübertrager, d. h. mit einem Instrument konstruierbar sind, welches das Abtragen von Strecken ermöglicht.[1] Erst mehr als 90 Jahre später ist es gelungen, tatsächlich eine Konstruktion des regulären Siebzehnecks mit diesen beschränkten Zeichenhilfsmitteln anzugeben (s. [2] u. [3]). Seitdem konnte die angegebene Konstruktion vereinfacht. Im folgenden geben wir die Konstruktion in dieser Form an.

Es ist zunächst leicht zu sehen, daß aus jenen gleichschenkligen Dreiecken, deren Basiswinkel $\varphi = \pi/34, 2\varphi, \dots, 16\varphi$ und deren Schenkel

[1]Mit Lineal und Streckenübertranger kann man durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden die Parallele ziehen, auf einer Geraden eine Senkrechte errichten, und alle Ausdrücke konstruieren, welche durch Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und aus einer Summe von Streckenquadraten durch Quadratwurzelziehen hervorgehen. J. Kúrschák, ehemaliger Professor der Mathematik an der Technischen Universität Budapest, hat in seiner Arbeit [1] gezeigt, daß in dieser Konstruktionen das Abtragen von Strecken mittels eines Eichmasses geschehen kann, d.h. mittels eines Instrumentes, welches das Abtragen einer, ein für allemal gegebenen Strecke, z.B. der Einheitsstrecke gestattet. So ist auch die hier angegebene Konstruktion mit Hilfe des Lineals und eines Eichmasses durchführbar.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x_1	$2+x_2$	x_1+x_3	x_2+x_4	x_3+x_5	x_4+x_6	x_5+x_7	x_6+x_8	x_7-x_8	y_1+y_2	y_1+y_3	y_2+y_4	y_3+y_5	y_4+y_6	y_5+y_7	y_6+y_8	y_7
x_2	x_1+x_3	$2+x_4$	x_1+x_5	x_2+x_6	x_3+x_7	x_4+x_8	x_5-x_8	x_6-x_7	y_2+y_3	y_1+y_4	y_1+y_5	y_2+y_6	y_3+y_7	y_4+y_8	y_5	y_6-y_8
x_3	x_2+x_4	x_1+x_5	$2+x_6$	x_1+x_7	x_2+x_8	x_3-x_8	x_4-x_7	x_5-x_6	y_3+y_4	y_2+y_5	y_1+y_6	y_1+y_7	y_2+y_8	y_3	y_4-y_8	y_5-y_7
x_4	x_3+x_5	x_2+x_6	x_1+x_7	$2+x_8$	x_1-x_8	x_2-x_7	x_3-x_6	x_4-x_5	y_4+y_5	y_3+y_6	y_2+y_7	y_1+y_8	y_1	y_2-y_8	y_3-y_7	y_4-y_6
x_5	x_4+x_6	x_3+x_7	x_2+x_8	x_1-x_8	$2-x_7$	x_1-x_6	x_2-x_5	x_3-x_4	y_5+y_6	y_4+y_7	y_3+y_8	y_2	y_1-y_8	y_1-y_7	y_2-y_6	y_3-y_5
x_6	x_5+x_7	x_4+x_8	x_3-x_8	x_2-x_7	x_1-x_6	$2-x_5$	x_1-x_4	x_2-x_3	y_6+y_7	y_5+y_8	y_4	y_3-y_8	y_2-y_7	y_1-y_6	y_1-y_5	y_2-y_4
x_7	x_6+x_8	x_5-x_8	x_4-x_7	x_3-x_6	x_2-x_5	x_1-x_4	$2-x_3$	x_1-x_2	y_7+y_8	y_6	y_5-y_8	y_4-y_7	y_3-y_6	y_2-y_5	y_1-y_4	y_1-y_3
x_8	x_7-x_8	x_6-x_7	x_5-x_6	x_4-x_5	x_3-x_4	x_2-x_3	x_1-x_2	$2-x_1$	y_8	y_7-y_8	y_6-y_7	y_5-y_6	y_4-y_5	y_3-y_4	y_2-y_3	y_1-y_2
y_1	y_1+y_2	y_2+y_3	y_3+y_4	y_4+y_5	y_5+y_6	y_6+y_7	y_7+y_8	y_8	$2+x_1$	x_1+x_2	x_2+x_3	x_3+x_4	x_4+x_5	x_5+x_6	x_6+x_7	x_7+x_8
y_2	y_1+y_3	y_1+y_4	y_2+y_5	y_3+y_6	y_4+y_7	y_5+y_8	y_6	y_7-y_8	x_1+x_2	$2+x_3$	x_1+x_4	x_2+x_5	x_3+x_6	x_4+x_7	x_5+x_8	x_6-x_8
y_3	y_2+y_4	y_1+y_5	y_1+y_6	y_2+y_7	y_3+y_8	y_4	y_5-y_8	y_6-y_7	x_2+x_3	x_1+x_4	$2+x_5$	x_1+x_6	x_2+x_7	x_3+x_8	x_4-x_8	x_5-x_7
y_4	y_3+y_5	y_2+y_6	y_1+y_7	y_1+y_8	y_2	y_3-y_8	y_4-y_7	y_5-y_6	x_3+x_4	x_2+x_5	x_1+x_6	$2+x_7$	x_1+x_8	x_2-x_8	x_3-x_7	x_4-x_6
y_5	y_4+y_6	y_3+y_7	y_2+y_8	y_1	y_1-y_8	y_2-y_7	y_3-y_6	y_4-y_5	x_4+x_5	x_3+x_6	x_2+x_7	x_1+x_8	$2-x_8$	x_1-x_7	x_2-x_6	x_3-x_5
y_6	y_5+y_7	y_4+y_8	y_3	y_2-y_8	y_1-y_7	y_1-y_6	y_2-y_5	y_3-y_4	x_5+x_6	x_4+x_7	x_3+x_8	x_2-x_8	x_1-x_7	$2-x_6$	x_1-x_5	x_2-x_4
y_7	y_6+y_8	y_5	y_4-y_8	y_3-y_7	y_2-y_6	y_1-y_5	y_1-y_4	y_2-y_3	x_6+x_7	x_5+x_8	x_4-x_8	x_3-x_7	x_2-x_6	x_1-x_5	$2-x_4$	x_1-x_3
y_8	y_7	y_6-y_8	y_5-y_7	y_4-y_6	y_3-y_5	y_2-y_4	y_1-y_3	y_1-y_2	x_7+x_8	x_6-x_8	x_5-x_7	x_4-x_6	x_3-x_5	x_2-x_4	x_1-x_3	$2-x_2$

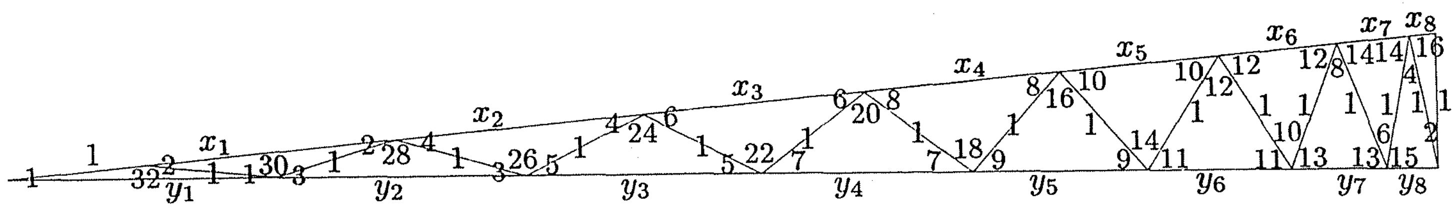

Abb. 1

alle gleich 1 sind, sich immer ein gleichschenkliges Dreieck zusammenstellen läßt (s. *Abb. 1*, wo die Maßzahlen der einzelnen Winkel in Bezug auf $\pi/34$ als Winkeleinheit angegeben sind). Wir bezeichnen die Basen der einzelnen Dreiecke, deren Basiswinkel $k\varphi$ ist ($k = 1, 2, \ldots, 16$) mit $x_{k/2}$ bzw. y_k, je nachdem k gerade oder ungerade Zahl ist. Unter den Größen x und y besteht dann eine Reihe von einfachen Relationen:

$$1 : \frac{1}{2}y_1 = y_1 : \left(1 + \frac{1}{2}x_1\right),$$

oder:

$$y_1^2 = 2 + x_1;$$

ebenso:

$$\begin{aligned}
1 : \tfrac{1}{2}y_1 &= y_2 : \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),\\
y_1y_2 &= x_1 + x_2;\\
1 : \tfrac{1}{2}y_1 &= y_3 : \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3),\\
y_1y_3 &= x_2 + x_3;\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
y_1 : \left(1 + \tfrac{1}{2}x_1\right) &= x_1 : \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),\\
x_1^2 &= y_1^2 + y_1y_2 - 2x_1\\
&= 2 + x_2;\\
y_1 : \left(1 + \tfrac{1}{2}x_1\right) &= x_2 : \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3),\\
x_1x_2 &= y_1y_2 + y_1y_3 - 2x_2\\
&= x_1 + x_2;\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
1 : \tfrac{1}{2}y_1 &= x_1 : \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),\\
x_1y_1 &= y_1 + y_2;\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
y_2 : \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) &= x_1 : \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),\\
y_2^2 &= x_1^2 + x_1x_2 - y_1y_2\\
&= 2 + x_3;\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Die so erhaltenen Produkte von je zwei der Größen x und y stellen wir in der auf S.000 befindlichen Multiplikationstabelle zusammen.

Auch die Höhen der einzelnen Dreiecke können wir aus der Figur entnehmen. Die Höhenlinien der Dreiecke mit den Basen x_8 und y_1 teilen dieselbe z. B. in je zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $\frac{1}{2}x_8$ und $\frac{1}{2}y_1$. So ist die Höhe des Dreiecks, dessen Base x_8 ist, gleich der Hälfte von y_1.

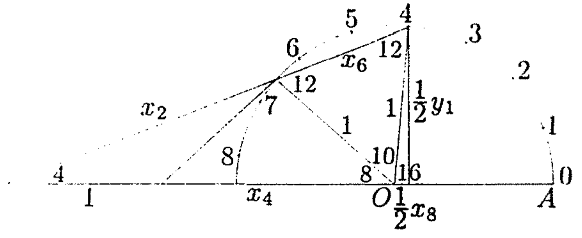

Abb. 2.

Aus den Dreiecken, deren Base x_2, x_4 und x_6 sind, sowie aus einer der beiden Hälften des Dreiecks, dessen Base x_8 ist, kann man ein rechtwinkliges Dreieck zusammenstellen (*Abb. 2*). Schlägt man nun um die Spitze O des Dreiecks, dessen Base x_6 ist, einen Kreis mit dem Radius 1, und teilt die Peripherie desselben von dem Punkt A angefangen, der auf der Verlängerung der größeren Kathete des rechtwinkligen Dreiecks liegt, in 17 gleiche Teile, so fällt einer der Eckpunkte dieses Dreiecks mit dem vierten Teilpunkt zusammen. Das von diesem Punkt auf OA gefällte Lot ist gleich $\frac{1}{2}y_1$ und die Entfernung des Fußpunktes desselben von O ist gleich $\frac{1}{2}x_8$. Unsere Aufgabe wird also gelöst sein, wenn es gelingt, die Größen x_8 und y_1 als Strecken mit Lineal und Streckenübertrager zu konstruieren, da man ja dann durch wiederholte Winkelhalbierung den Winkel $2\pi/17$ herstellen kann.

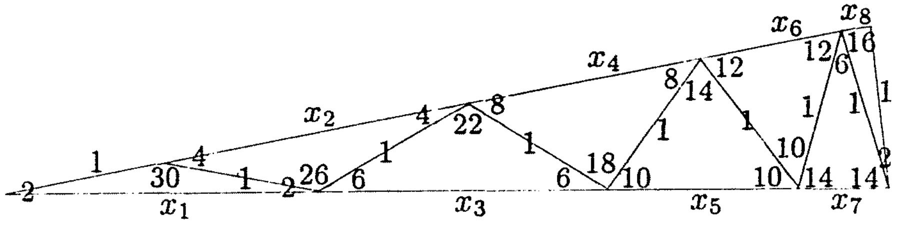

Abb. 3.

Aus denjenigen Dreiecken der ersten Figur, deren Base einer der x-Strecken ist, können wir ein gleichschenkliges Dreieck zusammenstellen (*Abb. 3*), aus dem die Gleichung:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 = 1$$

folgt. Ferner ist:

$$\begin{aligned}(x_2+x_8+x_4-x_1)(x_3+x_5-x_6+x_7) &= x_2x_3+x_3x_8+x_3x_4-x_1x_3\\ &\quad +x_2x_5+x_5x_8+x_4x_5-x_1x_5\\ &\quad -x_2x_6-x_6x_8-x_4x_6+x_1x_6\\ &\quad +x_2x_7+x_7x_8+x_4x_7-x_1x_7\\ &= x_1+x_5-x_6+x_5+x_1+x_7-x_4-x_2\\ &\quad +x_3+x_7+x_3-x_4+x_1-x_8-x_6-x_4\\ &\quad -x_4-x_8-x_2+x_3-x_2+x_7+x_5+x_7\\ &\quad +x_5-x_8+x_1-x_2-x_6+x_3-x_6-x_8.\end{aligned}$$

Nach Obigem ist also:

$$(x_2 + x_8 + x_4 - x_1)(x_3 + x_5 - x_6 + x_7) = 4.$$

So sind die Größen

$$\begin{aligned} w_1 &= x_2 + x_8 + x_4 - x_1,\\ w_2 &= -x_3 - x_5 + x_6 - x_7\end{aligned}$$

Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$w^2 + w - 4 = 0.$$

Nun ist $w_2 < 0$, da ja bereits $x_3 > x_6$ ist, und so ist $w_1 > 0$, da ja $w_1 w_2 = -4$ ist; also:

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17},\\ w_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}.\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}(x_2 + x_8)(x_4 - x_1) &= x_2x_4 + x_4x_8 - x_1x_2 - x_1x_8\\ &= x_2 + x_6 + x_4 - x_5 - x_1 - x_3 - x_7 + x_8 = -1,\end{aligned}$$

und so sind die Größen

$$u_1 = x_2 + x_8, \qquad (> 0) \tag{1}$$
$$u_2 = x_4 - x_1 \qquad (< 0) \tag{2}$$

Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$u^2 - w_1 u - 1 = 0;$$

also:

$$u_1 = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}\sqrt{w_1^2 + 4},$$
$$u_2 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}\sqrt{w_1^2 + 4}.$$

Ebenso erhält man, daß

$$(x_7 - x_6)(x_3 + x_5) = -1$$

ist, und so sind die Größen

$$v_1 = x_6 - x_7, \qquad (> 0) \tag{3}$$
$$v_2 = -x_3 - x_5 \qquad (< 0) \tag{4}$$

Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$v^2 - w_2 v - 1 = 0;$$

also:

$$v_1 = \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}\sqrt{w_2^2 + 4},$$
$$v_2 = \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}\sqrt{w_2^2 + 4}.$$

Da ferner

$$(x_2 + x_6)(x_8 - x_7) = -1$$

ist, so sind die Größen

$$z_1 = x_2 + x_6, \qquad (> 0) \tag{5}$$
$$z_2 = x_8 - x_7 \qquad (< 0) \tag{6}$$

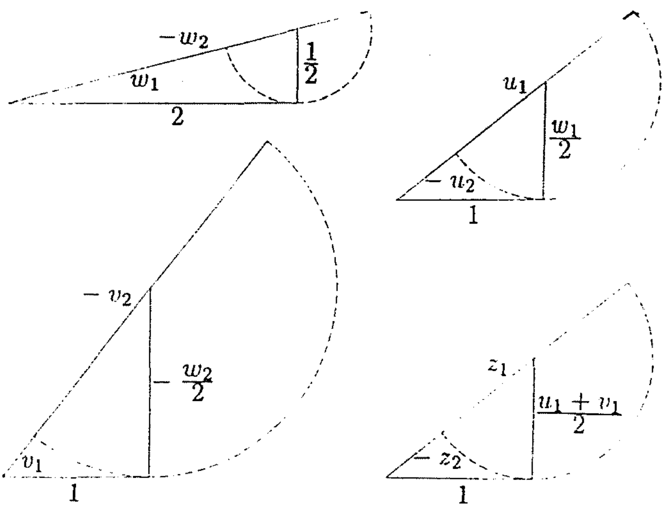

Abb. 4.

Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - (u_1 + v_1)x - 1 = 0;$$

also:

$$z_1 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{1}{2}\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + 4},$$
$$z_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{1}{2}\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + 4}.$$

Die Größen w_1, w_2, u_1, u_2, v_1, v_2, z_1, z_2 können wir nun mit unseren beschränkten Hilfsmitteln als Strecken leicht konstruieren (s. *Abb. 4*).

Wenn wir die Gleichungen (1), (4) und (6) der Reihe nach mit x_2, x_1 und x_3 multiplizieren und die Produkte von je zwei Größen x nach der Multiplikationstabelle in eine Summe von denselben umwandeln, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$u_1 x_2 = 2 + v_1 + x_4, \tag{7}$$
$$-(2 + v_2)x_1 = 2u_2 + z_1, \tag{8}$$
$$(1 + z_2)x_3 = w_2 + x_4. \tag{9}$$

Aus der Gleichung (8) folgt:

$$x_1 = -\frac{2u_2 + z_1}{2 + v_2}.$$

Mittels dieser Formel kann man die Strecke, deren Maß x_1 ist, leicht konstruieren (s. *Abb. 5*) und dann aus den Gleichungen (2), (7), (9), (4), (5), (3) und (1) der Reihe nach auch die Größen x_4, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 und x_8 als Strecken geometrisch bestimmen. Abgesehen von Streckenabtragen verlangt dies die Konstruktion nur von drei Paaren ähnlicher Dreiecke.

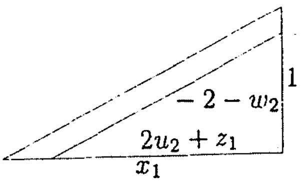

Abb. 5.

Die Strecke x_8 ist die Seite des dem Kreise vom Radius 1 einbeschriebenen regulären Polygons von 34 Seiten. Es ist bemerkenswert, daß alle bekannten Konstruktionen die Seite des 34-Ecks durch die sukzessive Auflösung einer Kette von *vier* quadratischen Gleichungen erhalten, obgleich die Auflösung von *drei* Gleichungen zweiten Grades genügt unser Ziel zu erreichen.

In der Tat folgt, aus der Gleichung

$$w_1 v_1 = (x_2 + x_8 + x_4 - x_1)(x_6 - x_7) = w_2 + 2u_1 - 1,$$

daß

$$v_1 = \frac{w_2 + 2u_1 - 1}{w_1}$$

ist, sodaßsich die Seitenlänge des regulären 34-Ecks durch die Wurzeln von drei quadratischen Gleichungen ausdrücken läßt.

Um die Größe y_1 zu bestimmen, betrachten wir folgende Differenzen:

$$\begin{aligned}
y_2^2 - x_8^2 &= x_1 + x_3 = x_1 x_2, \\
y_5^2 - x_5^2 &= x_7 - x_8 = x_1 x_8, \\
y_8^2 - x_3^2 &= -x_2 - x_6 = -x_2 x_4, \\
y_7^2 - x_6^2 &= -x_4 + x_5 = -x_4 x_8.
\end{aligned}$$

Aus denselben Gelichungen folgt, da

$$\begin{aligned}
& x_1 x_2 + x_1 x_8 - x_2 x_4 - x_4 x_8 = \\
&= (x_2 + x_8)(x_1 - x_4) = -u_1 u_2 = 1
\end{aligned}$$

ist, daß

$$\sqrt{y_2^2 + y_5^2 + y_7^2 + y_8^2} = \sqrt{1 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_8^2}$$

ist. Aus der Gleichung

$$(y_1 y_2) y_2 = y_1 (y_2 y_2)$$

folgt weiter:

$$(x_1 + x_2) y_2 = y_1 (2 + x_3),$$

oder

$$y_2 = \frac{2 + x_3}{x_1 + x_2} y_1.$$

Ebenso kann man y_5, y_7 und y_8 durch y_1 ausdrücken:

$$\begin{aligned}
y_5 &= \frac{x_3 + x_6}{x_1 + x_2} y_1, \\
y_7 &= \frac{x_5 + x_8}{x_1 + x_2} y_1, \\
y_8 &= \frac{x_6 - x_8}{x_1 + x_2} y_1,
\end{aligned}$$

und so erhält man:

$$y_1 = \frac{(x_1 + x_2)\sqrt{1 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_8^2}}{\sqrt{(2 + x_3)^2 + (x_3 + x_6)^2 + (x_5 + x_8)^2 + (x_6 - x_8)^2}}.$$

Nach dieser Formel kann man die Strecke y_1 leicht konstruieren (s. *Abb. 6*), und damit ist die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks mit Lineal und Streckenübertrager ausgeführt.

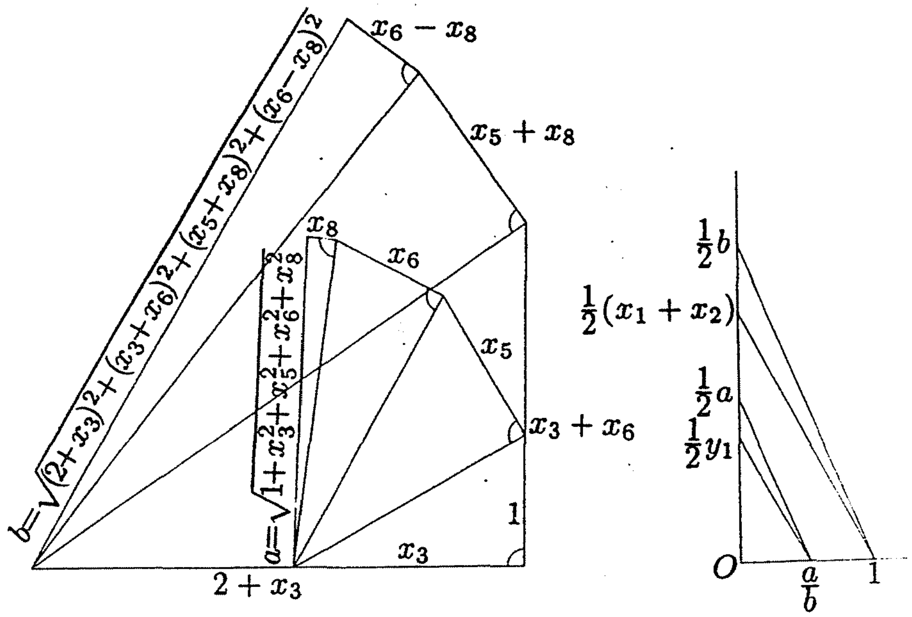

Abb. 6.

Literature

1. KÜRSCHÁK, J.: Das Streckenabtragen. *Math. Ann.* Vol. 55. (1902), S.597–598.
2. STROMMER, J.: Konstruktion des regulären Siebzehnecks mit Lineal und Streckenübertrager. *Acta Math. Hung.* Vol. 58 (1-2) (1992), S. 217-226.
3. STROMMER, J.: Berichtigung zu meiner Arbeit: Konstruktion des regulären Siebzehnecks mit Lineal und Streckenüberager. *Acta Math. Hung.* Vol. 60 (1–2) (1992), S. 269–270.

Addresse:

Gyula STROMMER
Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest
H–1521 Budapest, Ungarn