

# DIE NEUNPUNKT-KEGELSCHNITTE DES DREIECKS

Von

J. MAKLÁRI

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Fakultät für Architektur,  
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 3. September 1971)  
Vorgelegt von Prof. Dr. G. PETRICH

In der Abhandlung wird ein Satz über die Seitenhalbierungspunkte des Dreiecks bewiesen, nachdem sämtlichen Punkten der Dreiecksebene — gemäß der im weiteren genau bestimmten Erklärung — je ein Neunpunkt-Kegelschnitt zugeordnet werden kann.

**Satz.** Die Seitenhalbierungspunkte eines Dreiecks und die drei Mittelpunkte der Strecken, die einen beliebigen Punkt der Dreiecksebene mit den Eckpunkten des Dreiecks verbinden, und die drei Schnittpunkte der durch diese Strecken bestimmten Geraden mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks liegen immer auf einem Kegelschnitt (Abb. 1).

Der Satz wird zum Teil mit projektiv geometrischen, zum Teil unter Anwendung von elementar-synthetischen Methoden bewiesen.

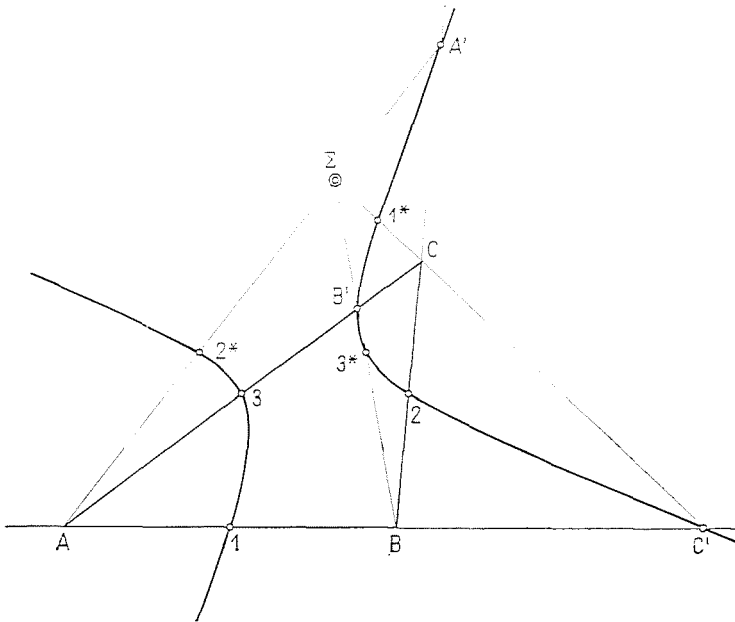


Abb. 1

*Beweis des Satzes.* Es sei das vorgegebene Dreieck  $ABC$  und seine Seitenhalbierungspunkte seien Basispunkte genannt.

Im ersten Teil soll bewiesen werden, daß durch die drei seitenhalbierenden Basispunkte sowie durch die Halbierungspunkte (1 bis 6) der Geraden zwischen einem in der Dreiecksebene beliebig angesetzten Punkt und den Eckpunkten des Dreiecks ein Sechseck gebildet wird, dessen einander gegenüberliegende Seiten parallel und einander gleich sind (Abb. 2). Der Abbildung lassen sich folgende Beziehungen entnehmen: Seite 12, als Verbindungsgerade zwischen den Halbierungspunkten der Seiten  $BA$  und  $BC$  ist parallel und gleich

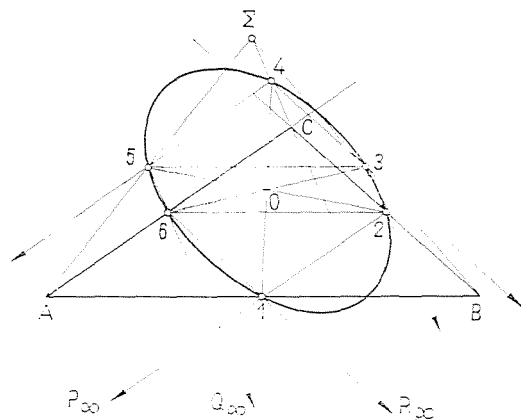


Abb. 2

der Hälfte von Seite  $AC$ , jedoch auch parallel zur Seite 45 und dieser gleich. Das folgt einfach daraus, daß  $AC$  die gemeinsame Seite der Dreiecke  $BAC$  und  $\Sigma AC$  darstellt und die Geradenstrecken 12 und 45 Verbindungsgeraden zwischen den Halbierungspunkten der zu den Eckpunkten  $B$  bzw.  $\Sigma$  der Dreiecke gehörenden Seiten sind. Auf die gleiche Weise läßt es sich deuten, daß Seite 23 zur Seite 56 parallel und dieser gleich, Seite 34 mit Seite 61 parallel und dieser gleich ist. Es kann weiterhin festgestellt werden, daß die drei Basispunkte (1, 2, 6) und die durch Punkt  $\Sigma$  zugeordneten drei Punkte (3, 4, 5) Dreiecke bestimmen, die einander gegenüber um  $180^\circ$  verdreht sind. Daraus folgt zugleich, daß die beiden Dreiecke kongruent sind.

Von Dreiecken in derartiger Lage bzw. von den sechs Ecken der beiden Dreiecke läßt sich mit Hilfe des *Pascal-Satzes* nachweisen, daß sie auf demselben Kegelschnitt liegen.

Werden nämlich in der bekannten Weise und anhand einer Tabelle die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten gesucht

12	23	34
45	56	61
$P$	$Q$	$R = p$

$$(| 12 | | 45 |) = P, \quad (| 23 | | 56 |) = Q, \quad (| 34 | | 61 |) = R,$$

so werden — zufolge der parallelen Lage der gegenüberliegenden Seiten — die drei Schnittpunkte im Unendlichen liegen, d. h. sie liegen in einer Geraden

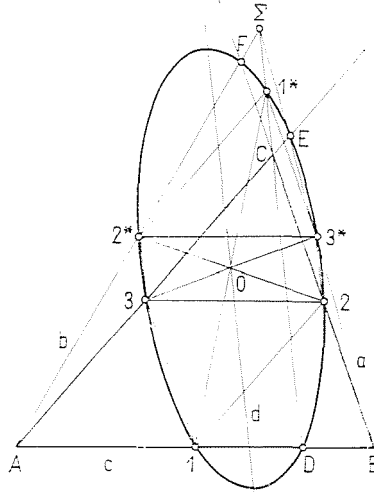


Abb. 3

der Ebene in unendlicher Ferne, die der *Pascalschen Geraden* entspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen: *die sechs Punkte sind auf demselben Kegelschnitt.*

Im weiteren ist nachzuweisen, daß die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden zwischen Punkt  $\Sigma$  und den Eckpunkten des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten auch auf der Kegelschnittperipherie liegen; das geschieht in folgender Weise.

Die beiden Dreiecke  $(1, 2, 3)$  und  $(1^*, 2^*, 3^*)$  sind auch in perspektiver Lage, da die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich sind und die Verbindungsgeraden der einander gegenüberliegenden Eckpunkte denselben Punkt schneiden (Abb. 3). Daraus folgt jedoch auch, daß die gegenüberliegenden Seiten gleiche Sehnen sind und vom Mittelpunkt  $O$  in gleichem Abstand liegen, daher gehen die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Eckpunkte als Durchmesser durch den Mittelpunkt  $O$ . Dieser ist mit dem Mittelpunkt der erwähnten Perspektivität identisch.

Nun wird der zweite Schnittpunkt der Seite  $AB$  mit dem Kegelschnitt abgesteckt.

Sehne 23 ist zur Sehne  $2^*3^*$  parallel und dieser gleich, doch wissen wir auch von der Geraden  $AB$ , daß auch diese zu den beiden Sehnen parallel ist; das wurde nämlich bereits nachgewiesen. Aus der mehrfachen Symmetrie folgt, daß der zweite Schnittpunkt der Geraden  $AB$  mit dem Kegelschnitt das Spiegelbild ( $D$ ) auf den durch die Halbierungspunkte der Sehnen 23 und  $2^*3^*$  durchgehenden Durchmesser  $d$  des bekannten Schnittpunktes (Basispunkt 1) sein wird, als der andere Endpunkt der zu den vorigen beiden Sehnen parallelen Sehne.

Es bleibt zu beweisen, daß dieser Schnittpunkt  $D$  auch ein Punkt der Geraden  $\Sigma C$  ist, d. h. ihr zweiter Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt.

Es ist bekannt, daß der Durchmesser  $d$  zur Geraden  $\Sigma C$  parallel ist, da beide Geraden zu den parallelen Sehnen  $23^*$  und  $2^*3$  parallel, daher auch miteinander parallel sind. Punkt  $1^*$  der Geraden  $\Sigma C$  ist auf den Mittelpunkt  $O$  zum Basispunkt 1 symmetrisch; das bedeutet, daß auch Punkt  $1^*$  in der gleichen Entfernung von der Geraden  $d$  liegt, wie die Punkte 1 oder  $D$ . Die beiden letzteren sind nämlich auf die Gerade  $d$  die Spiegelbilder voneinander. Aus dem Gesagten ist klar zu erkennen, daß die Gerade  $\Sigma C$  auch den Punkt  $D$  enthält, der den zweiten Schnittpunkt der Geraden mit dem Kegelschnitt darstellt.

Dasselbe läßt sich auch über die Geraden  $\Sigma A$  und  $\Sigma B$  nachweisen.

Damit ist unser Hauptsatz vollkommen bewiesen. Die anhand des Satzes erzeugten Kegelschnitte bilden gemeinsam den *Neunpunkt-Kegelschnitt des Dreiecks*.

Die Behauptung des Satzes wurde für einen Punkt von ganz allgemeiner Lage in der Ebene des Dreiecks nachgewiesen, daher kann ausgesagt werden, daß sie für jeden Punkt der Ebene gilt, auch die Punkte einer unendlich fernen Geraden der Ebene mitinbegriffen. Im weiteren soll dies ausführlich erörtert werden.

*Diskussion.* Im folgenden soll der im allgemeinen ausgesagte Satz daraufhin untersucht werden, wann und welche Kegelschnitte zu den in der Ebene des Dreiecks beliebig angesetzten Punkten  $\Sigma$  gehören. Unserer Behauptung gemäß gehört zu jedem Punkt der Ebene je ein Kegelschnitt; das gilt jedoch auch umgekehrt: zu jedem der Kegelschnitte in den Seitenhalbierungspunkten des Dreiecks gehört in der Ebene je ein Punkt  $\Sigma$ .

Die Untersuchung beginnt damit, daß in der Dreiecksebene Bereiche festgelegt werden, die einander ähnlich sind und durch deren Punkte gleichartige Kegelschnitte bestimmt werden. Eine derartige Unterteilung der Ebene wird mit den Seitengeraden des Dreiecks unternommen. Unter den erhaltenen sieben Bereichen sind durch drei Seiten begrenzt ein Innen- und drei Außenbereiche sowie durch zwei Seiten begrenzt drei ähnliche Außenbereiche.

Es ist zu bemerken, daß im weiteren die  $\Sigma$  Punkte der endlichen Ebenenbereiche bzw. die zu diesen gehörenden Kegelschnitte untersucht werden sollen.

Das bedeutet, daß auch die Mittelpunkte der erhaltenen Kegelschnitte im Endlichen liegen werden, man erhält also eine Ellipse oder Hyperbel.

1. Zuerst soll ein Punkt  $\Sigma$  in dem einen durch zwei Seiten begrenzten Außenbereich ausgewählt werden (Abb. 4). Die Untersuchung wird nach folgender Überlegung durchgeführt. Von den gemäß dem ersten Teil des Hauptsatzes konstruierten sechs Punkten wird nachgewiesen, daß sie in diesem Bereich immer ein konvexes Sechseck bilden, von dessen Ecken bekannt ist, daß sie nur auf der Peripherie der Ellipse liegen können. Diese Annahme wird folgendermaßen bewiesen.

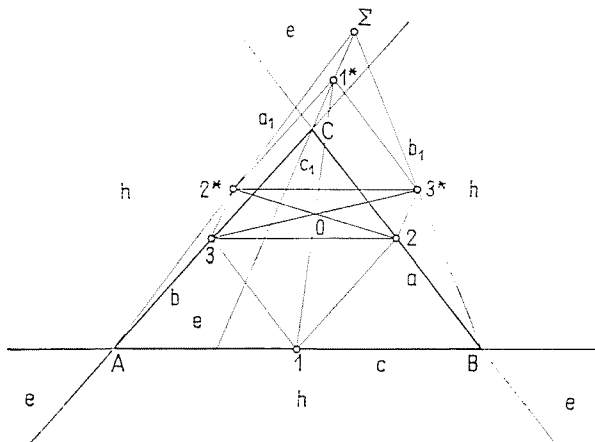


Abb. 4

Es seien 1,2,3 die Seitenhalbierungspunkte des Grunddreiecks  $ABC$  und die durch den im über den Eckpunkt  $C$  des Dreiecks verlängerten Bereich zwischen den Seiten  $a$  und  $b$  angesetzten Punkt  $\Sigma$  diesen zugeordneten weiteren drei Punkte  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ . Nach dem allgemeinen Satz sind die beiden Dreiecke kongruent und einander gegenüber um  $180^\circ$  verdreht. Nehmen wir den Halbirungspunkt  $2^*$  der aus  $A$  ausgehenden Geradenstrecke  $a_1$  und die Gerade  $13$ , von der es bekannt ist, daß sie zur Seite  $BC$  parallel ist. Es wird behauptet, daß der Punkt  $2^*$  in der Geraden  $a_1$  — in den durch zwei Geraden begrenzten drei äußeren Bereichen — immer in größerem Abstand von Punkt  $A$  liegt als Punkt 3 der Geraden  $b$ .

Gemäß dem Hauptsatz ist von der Geraden  $2^*3$  bekannt, daß sie zur Geraden  $c_1$  parallel ist, und dasselbe gilt auch für die Geraden  $23^*$  und  $1^*C \equiv \Sigma C \equiv c_1$ . Das Dreieck  $1^* 2^* 3^*$  entfernt sich also in Richtung  $c_1$  vom Dreieck  $123$  nach Punkt  $\Sigma$ . D. h. daß Punkt  $2^*$  zwischen der Geraden  $13$  und Punkt  $\Sigma$  liegen wird; es ist also klar, daß Punkt 3 der Geraden  $b$  näher zu  $A$  liegt. (Kommt Punkt  $\Sigma$  in den Eckpunkt  $C$ , werden die beiden Punkte identisch sein.) Die parallele Lage der Seiten der beiden Dreiecke

bleibt zufolge der Beziehung zwischen Dreiecken mit gemeinsamer Seite immer erhalten.

Die konvexe Lage des Sechsecks ändert sich nur in dem Falle, wenn Punkt  $\Sigma$  seine ursprüngliche Lage verläßt, um auf die Seiten  $a$  oder  $b$  zu gelangen. In diesem Falle fallen nämlich die je drei Halbierungspunkte auf je eine Gerade, wobei der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt. Daraus folgt auch, daß die Seitengeraden des Grunddreiecks die Grenzfälle ergeben, wo die Kegelschnitte zerfallen bzw. in einer Menge von Kegelschnitten mit zwei Parametern übergehen.

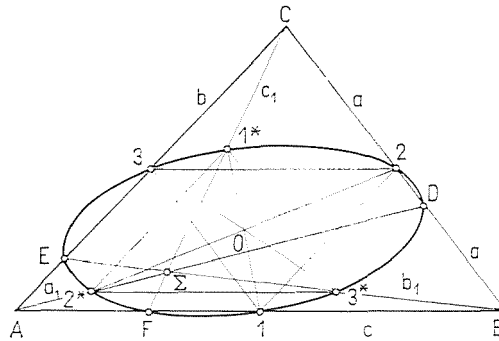


Abb. 5

Damit läßt sich aussagen, daß zu  $\Sigma$  Punkten, die in den durch zwei Seiten des Dreiecks begrenzten drei äußeren Bereichen angesetzt werden, immer Ellipsen gehören.

2. Es soll nun untersucht werden, was geschieht, wenn Punkt  $\Sigma$  im Innenbereich des Dreiecks angesetzt wird (Abb. 5). Ähnlich wie im vorigen Falle bleibt die konvexe Lage des Sechsecks auch diesmal erhalten, nur kommt jetzt Punkt  $2^*$  der Geraden  $a_1$  näher dem Punkt  $A$  zu liegen, fällt also zwischen die Gerade  $13$  und Punkt  $A$ . Die Summe der Entfernungen zwischen Punkt  $\Sigma$  und den Eckpunkten ist in jedem Falle kleiner als die Summe der Seiten des Grunddreiecks ( $\Sigma A + \Sigma B + \Sigma C < AB + BC + CA$ ), da sich Punkt  $\Sigma$  im inneren Bereich des Grunddreiecks bewegt. Daher können sich die Dreiecke voneinander nicht entfernen, sondern schneiden sich immer. Das folgt bereits aus dem vorigen Nachweis für die äußeren Bereiche und damit kann ausgesagt werden: Wird ein Punkt im Innenbereich des Dreiecks angenommen, bestimmt er ebenfalls eine Ellipse.

Es bedarf keiner weiteren Beweisführung, daß die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden des Punktes und der Eckpunkte des Grunddreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten ebenfalls Punkte des Kegelschnittes darstellen, da dieser Umstand bereits beim Hauptsatz nachgewiesen wurde.

3. Als dritter Fall sollen zu den  $\Sigma$  Punkten in den durch drei Seiten begrenzten drei äußeren Bereichen gehörende Kegelschnitte untersucht werden.

Im Vorstehenden wurde bereits festgestellt, daß die Seitengeraden des Dreiecks die Grenzen zwischen den verschiedenartigen Kegelschnittmengen bilden. Geht man also aus den durch zwei Seiten des Dreiecks begrenzten drei äußeren Bereichen oder aus dem durch drei Seiten desselben begrenzten inneren Bereich in einen der ebenfalls durch drei Seiten begrenzten drei äußeren Bereiche

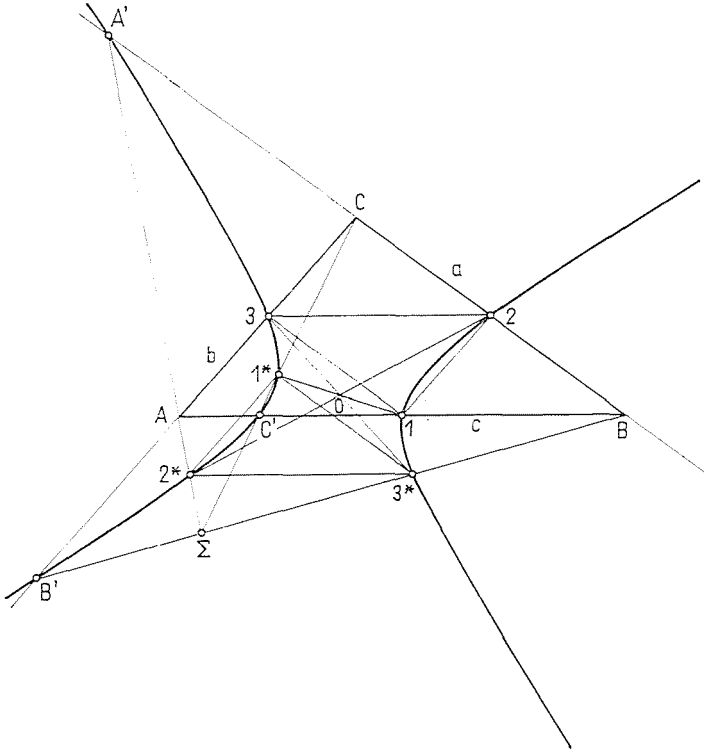


Abb. 6

über, so werden auf den Seitengeraden aus den Ellipsen in Geradenpaare zerfallene Kegelschnitte; wird der Punkt in einem anderen Bereich gewählt, erhält man jeweils eine andere Kegelschnittmenge. Da der beliebig gewählte Punkt noch immer im endlichen Teil der Ebene ist, wird auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes im Endlichen liegen, aus der vorigen Ellipsenmenge kann der Kegelschnitt — über den Fall des Zerfallens in Geraden — nur in Hyperbel übergehen (Abb. 6).

Es ist zu beweisen, daß in diesen Bereichen anstatt der Ellipsen bestimmenden konvexen Sechsecke konkave Sechsecke entstehen, durch die Hyperbel bestimmt werden.

Durch den im neuen Bereich angesetzten Punkt  $\Sigma$  werden die anderen drei Punkte den Basispunkten 1, 2, 3 so zugeordnet, daß sowohl die parallele

Lage und die Kongruenz als auch die perspektive Lage erhalten bleiben. Der Kegelschnitt-Mittelpunkt ergibt sich also wieder direkt. Ähnlich wie im vorigen Falle, wird auch hier die relative Lage des fixen (1, 2, 3) und des beweglichen ( $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ) Dreiecks untersucht.

Durch die Punkte 2, 3,  $2^*$ ,  $3^*$  der beiden Dreiecke wird ein Parallelogramm gebildet (Abb. 7), wo eine der einander gegenüberliegenden Seiten (2, 3) fix und zur Seite  $c$  parallel, die andere beweglich ( $2^*$ ,  $3^*$ ) ist und die zur Seite  $c$  parallele Lage auch bei der Bewegung beibehält. Die beiden anderen

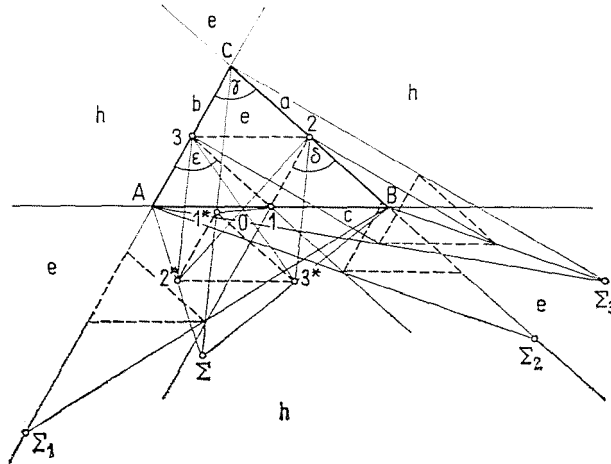


Abb. 7

gegenüberliegenden Seiten hingegen folgen bei der Bewegung immer der Richtung der Geraden  $\Sigma C$  (diese parallele Lage wurde bereits beim Hauptsatz nachgewiesen).

Betrachten wir den Winkel  $\gamma$  beim Eckpunkt  $C$ , der gleich den Winkel  $\delta$  und  $\varepsilon$  bei den Punkten 2 und 3 ist, weil sie gleichliegend sind. Die Gerade  $\Sigma C$  bewegt sich zwischen den Geraden  $a$  und  $b$  im Winkelfeld  $\gamma$  und dieser folgen auch die Geraden  $23^*$  und  $32^*$ . Diese drei Geraden drehen sich um je einen festen Punkt ( $C$ , 2 bzw. 3), durch Punkt  $\Sigma$  werden also die Gerade  $a$  oder die Gerade  $b$  erreicht, die Gerade  $\Sigma C$  fällt mit einer der beiden zusammen, wobei gleichzeitig auch eine Seite des Parallelogramms dorthin zu liegen kommt, während die andere, gegenüberliegende Seite des Parallelogramms mit einer Seite des festen Dreiecks zusammenfällt. Bis zu diesem Grenzfall verbleibt je ein gegenüberliegender Eckpunkt ( $1, 1^*$ ) der Dreiecke innerhalb des Parallelogramms, im Grenzfall kommt er auf die Seite und dann zerfällt der Kegelschnitt in Gerade. Als Punkt  $\Sigma$  in den benachbarten Bereich gelangt, springt die Gerade  $\Sigma C$  von den Seiten ab, die genannten zwei Eckpunkte des Dreiecks ( $1, 1^*$ ) treten aus dem Parallelogramm heraus und durch die sechs Ecken wird bereits ein konvexes Sechseck gebildet, das wieder eine Ellipse bestimmt.



Wird Punkt  $\Sigma$  in dieser Weise über sämtliche durch die Seiten des Dreiecks begrenzte Bereich  $e$  geführt, läßt sich feststellen, daß im Bereiche Ellipsen, im Bereich  $h$  Hyperbel entstehen, und die Kegelschnitte auf den Seiten immer in Geraden zerfallen (siehe auch die Spezialfälle und den Zerfall in Abb. 9).

4. Nun soll der Fall untersucht werden, wenn Punkt  $\Sigma$  im Unendlichen liegt. Welche Kegelschnitte werden durch ihn dann den drei Grundpunkten zugeordnet?

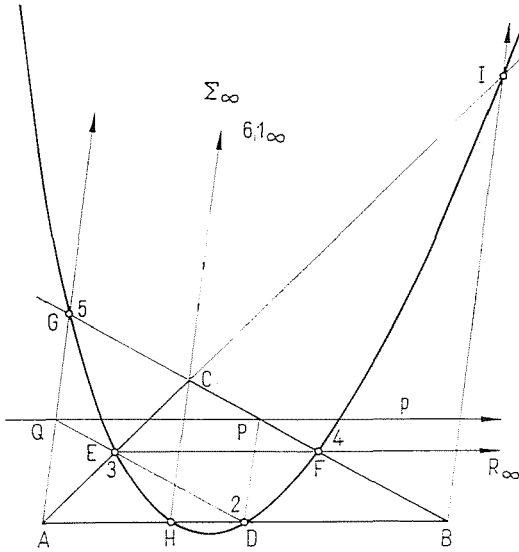


Abb. 8

Bei der Untersuchung wird die folgende Überlegung verfolgt. Neben den drei Seitenhalbierungspunkten (2, 3, 4) bedient man sich auch der durch die Verbindungsgeraden zwischen den Eckpunkten des Dreiecks und Punkt  $\Sigma$  in den gegenüberliegenden Seiten ausgeschnittenen Punkte (Abb. 8). Es wird nachgewiesen, daß letztere Punkte dieselbe Parabel darstellen, die auch durch die drei vorgenannten Seitenhalbierungspunkte durchgeht.

Zu dieser Behauptung soll angenommen werden, daß Punkt I ein unendlich ferner Punkt der Parabel und 6 ihre Tangente in diesem Punkt seien. Bekannt sind also die drei Seitenhalbierungspunkte (2, 3, 4), ein Punkt im Unendlichen und die Tangente (6, 1); das sind fünf Angaben, die den Kegelschnitt bestimmen. Von den fünf Punkten soll bewiesen werden, daß sie weitere Parabelpunkte darstellen. Für die Beweisführung wird der *Pascal-Satz* herangezogen.

Für die Konstruktion der Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten erhält man mit der Numerierung in der Abbildung die *Pascal-Gerade*

$$(| 12 | | 45 |) = P, \quad (| 23 | | 56 |) = Q,$$

durch die Punkte  $P$  und  $Q$  ist also die *Pascal-Gerade* bereits bestimmt. Punkt  $R$  liegt im Unendlichen, weil sich die Geraden 34 und 61 (im Unendlichen liegende Punkte) nur im Unendlichen schneiden, daher wird die *Pascal-Gerade* parallel zur Geraden 34 sein. Punkt  $Q$  ist auch ein Punkt der Geraden 56, eine Tatsache, die wie folgt nachgewiesen wird.

Die Strecke  $DB$  ist gleich der Hälfte der Seite  $AB$ , da  $D$  dem Hauptsatz gemäß den Halbierungspunkt von Seite  $AB$  darstellt ( $D \equiv 2$ ): die Strecke  $EF$  ist parallel und gleich der Strecke  $DB$ , da sowohl  $E$  als  $F$  Seitenhalbierungspunkte sind. Die Gerade  $QP = p$  ergab sich — dem *Pascal-Satz* gemäß — parallel zur Geraden  $EF$ , die Geradenstrecke  $QP$  ist also parallel und gleich der Strecke  $DB$ , weil die Gerade  $ED$  — die ebenfalls den Punkt  $Q$  enthält — zur Seite  $BC$  parallel ist, auf der hinwieder Punkt  $P$  liegt; daraus folgt, daß die Punkte  $DBPQ$  ein Parallelogramm bilden.

Schließlich bleibt noch nachzuweisen, daß Punkt  $Q$  auch in der Geraden  $AG$  liegt. Strecke  $QP$  ist auch der Strecke  $AD$  parallel und gleich — was aus dem vorangehenden Zusammenhang zu erkennen ist —, also ist auch  $ADPQ$  ein Parallelogramm; daraus folgt, daß Punkt  $Q$  in der Geraden  $AG$  liegt und diese dem Hauptsatz gemäß mit der Geraden 56 identisch ist. Damit ist nachgewiesen, daß  $G$  ein Parabelpunkt ist.

In ähnlicher Weise läßt sich nachweisen, daß auch  $I$  oder  $H$  Parabelpunkte darstellen. Daraus folgt, daß unter Weglassung des mit 1 bezeichneten, unendlich fern vorausgesetzten Punktes bzw. von dessen durch 6 bezeichneter, unendlich ferner Tangente, durch die Punkte  $DEFGHI$  dieselbe Parabel bestimmt wird.

Unsere Behauptung ist bewiesen; liegt Punkt  $\Sigma$  in einer unendlich fernen Geraden der Ebene des Dreiecks, so ist den drei Seitenhalbierungspunkten stets eine Parabel zugeordnet.

5. Wird Punkt  $\Sigma$  parallel zu einer Seite des Dreiecks  $ABC$  angegeben, zerfällt die Parabel in zwei Geraden, da gerade wegen der parallelen Lage die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden zwischen Punkt  $\Sigma$  und den Eckpunkten und der gegenüberliegenden Seiten im Unendlichen liegen.

6. Abb. 9 zeigt Spezialfälle. Punkt  $\Sigma$  bewegt sich eine Kreisperipherie entlang, die so bestimmt wurde, daß die Längen der Schwerlinien des Grunddreiecks von den Seiten aus berechnet in entgegengesetzter Richtung aufgetragen wurden; auf die erhaltenen drei Punkte ( $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C$ ) wurde der Kreis gelegt, dessen Mittelpunkt mit dem Höhepunkt des Dreiecks ( $\Sigma$ ) identisch ist. Die Halbierungspunkte der Geradenstrecken zwischen den sich auf diesem Kreis bewegenden Punkten  $\Sigma$  und den Eckpunkten des Grunddreiecks  $ABC$  bewegen sich in diesem Falle ebenfalls einen Kreis entlang, u. zw. einen Kreis mit gleichem Halbmesser. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen in den zu den entsprechenden Eckpunkten gehörenden Höhenlinien, in den Halbierungspunkten der Geradenstrecken zwischen dem Höhepunkt und den Eckpunkten.

6.a. Durch die den Kreis bestimmenden drei Punkte ( $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C$ ) werden den Grundpunkten drei Punkte in perspektiver Lage zugeordnet, wobei je ein Eckpunkt der Dreiecke immer gemeinsam ist. Von den sechs Punkten fallen je drei dann in eine Gerade, der Kegelschnitt zerfällt also in zwei Geraden. Man erhält auch in Geraden zerfallende Kegelschnitte, wenn Punkt  $\Sigma$  auf den Seiten des durch die Punkte  $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C$  bestimmten Dreiecks oder in deren Verlängerung angenommen wird.

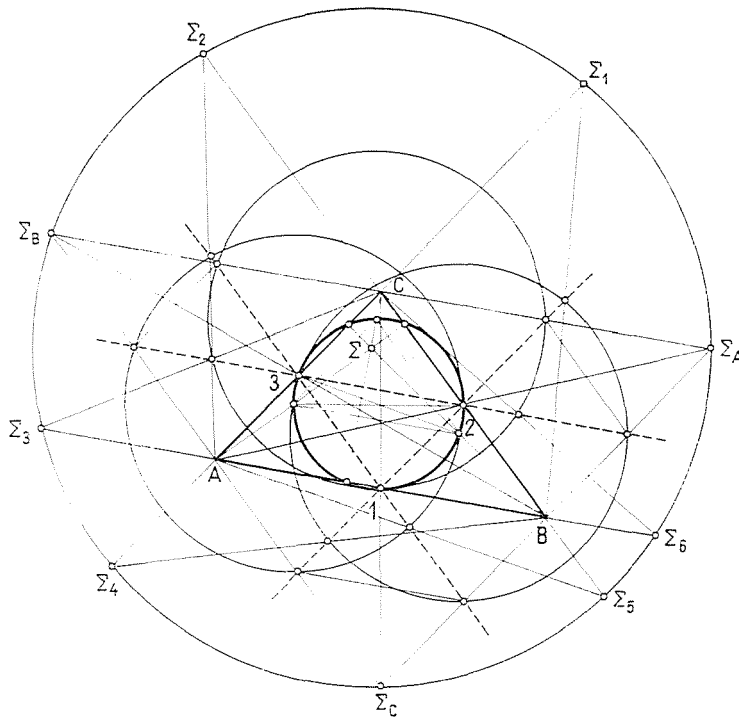


Abb. 9

6.b. Die von  $\Sigma_1$  bis  $\Sigma_6$  gewählten Punkte, die auf dem Kreis ausgeschnittene Punkte der verlängerten Seiten sind, stellen alle Grenzfälle dar, wo die Kegelschnitte in zwei Geraden zerfallen. Der eine Kegelschnitt ist immer die Seite des Dreiecks, während der andere die zu dieser parallele Verbindungsgerade zwischen zwei Seitenhalbierungspunkten darstellt.

6.c. In drei Fällen, wenn Punkt  $\Sigma$  in einem der Eckpunkte des Grunddreiecks  $ABC$  liegt, werden die Kegelschnitte unbestimmt, da von den sechs Punkten je zwei zusammenfallen und — wie bekannt — über vier Punkte unendlich viele Kegelschnitte gelegt werden können.

6.d. Als Sonderfall läßt sich der einzige Kreis der auf neun Punkte gelegten Kegelschnittmenge, der sog. *Feuerbach-Kreis*, ansprechen. In diesem Falle ist Punkt  $\Sigma$  mit dem Höhepunkt des Grunddreiecks identisch.

## Anhang

In diesem Abschnitt werden der im Vorstehenden behandelte und nachgewiesene Satz über ebene Zusammenhänge eines Grunddreiecks und die auf dieser Grundlage derivierten Neunpunkt-Kegelschnitte als Projektionen des ebenen Schnittes einer dreiseitigen Pyramide auf die Grundebene und als Gebilde der Seitenhalbierungspunkte des Grunddreiecks vorgeführt (Abb. 10).

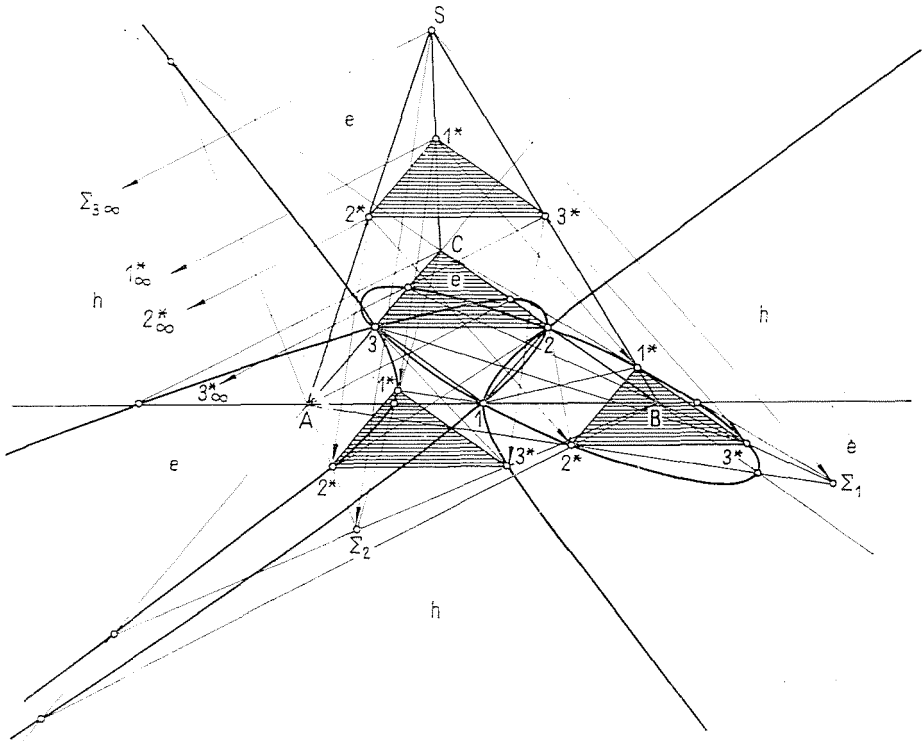


Abb. 10

Es seien das gegebene Dreieck wieder  $ABC$  und seine Seitenhalbierungspunkte, 1, 2, 3. Ein Raumpunkt  $S$  (der nicht in der Ebene des Grunddreiecks liegt) wird mit den Eckpunkten des Grunddreiecks verbunden und die erhaltene dreiseitige Pyramide wird mit einer Ebene geschnitten, die in den Halbierungspunkten der Seitenkanten der Pyramide ( $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ) liegt.

Ähnlich den im Hauptsatz bewiesenen Zusammenhängen, läßt sich — in Kenntnis der vorigen Ausführungen — von den durch die Seitenhalbierungspunkte des Grunddreiecks der Pyramide und durch die Seitenkantenhalbierungspunkte bestimmten Dreiecken leicht nachweisen, daß diese einander gegenüber um  $180^\circ$  verdreht sind, ihre gegenüberliegenden Seiten zu einander

parallel und einander gleich, also auch kongruent sind. Da die Halbierungspunkte der Seitenkanten der Pyramide von der Grundebene in gleicher Entfernung sind, sind die Ebenen der beiden Dreiecke parallel.

Nun soll untersucht werden, was dann geschieht, wenn der ebene Schnitt  $1*2*3*$  der Pyramide durch parallele Projektion auf die Grundebene gebracht wird.

Es ist bekannt, daß sich die obenvorgeführten Eigenschaften des zur Grundebene parallelen, ebenen Schnittes bei paralleler Projektion auf die Grundebene nicht ändern. Aus diesen Eigenschaften folgt, daß die sechs Ecken der beiden Dreiecke ( $123$  und  $1*2*3*$ ) — in der Grundebene der Pyramide — ebenfalls auf einem Kegelschnitt liegen. Die Punkte werden durch die Projektion des Scheitelpunktes  $S$  der Pyramide auf die Grundebene einander zugeordnet, die auch hier durch  $\Sigma$  bezeichnet wird. Die Art der Kegelschnitte wird auch hier durch die Lage der  $\Sigma$  Punkte bestimmt. Unsere Feststellungen über die durch die Seiten des Grunddreiecks begrenzten sieben Bereiche sind also auch diesmal gültig und können bewiesen werden; d. h. je nachdem auf welchen der sieben Bereiche Punkt  $S$  projiziert wird, entstehen Ellipsen ( $\Sigma_1$  im Bereich  $e$ ) oder Hyperbel ( $\Sigma_2$  im Bereich  $h$ ). Der Übergang von einer Kegelschnittmenge in die andere erfolgt ebenfalls auf den Seiten.

Ist die Projektionsrichtung zur Pyramidengrundebene parallel ( $\Sigma_3\infty$ ), liegt der dem Punkt  $S$  entsprechende Punkt im Unendlichen, d. h. Punkt  $\Sigma$  liegt in einer unendlich fernen Geraden der Ebene, der Kegelschnitt wird also zur Parabel.

### Zusammenfassung

Im Beitrag werden folgende Sätze über die Seitenhalbierungspunkte des Dreiecks bzw. über einen beliebigen Punkt der Ebene des Dreiecks erörtert und nachgewiesen:

Die Seitenhalbierungspunkte eines Dreiecks und die drei Mittelpunkte der Strecken, die einen beliebigen Punkt der Dreiecksebene mit den Eckpunkten des Dreiecks verbinden, und die drei Schnittpunkte der durch diese Strecken bestimmten Geraden mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks liegen immer auf einem Kegelschnitt.

Der Satz wird zum Teil nach elementar-synthetischen, zum Teil nach bekannten, projektiv-geometrischen Methoden bewiesen.

Im Anhang werden der Satz über die ebenen Zusammenhänge und die auf dieser Grundlage abgeleiteten Neunpunkt-Kegelschnitte gezeigt, als Gebilde der Projektion auf die Grundebene des ebenen Schnittes in den Seitenhalbierungspunkten der dreiseitigen Pyramide und der Seitenhalbierungspunkte des Grunddreiecks.

### Literatur

1. J. STEINER's Vorlesungen über Synthetische Geometrie. Erster Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in Elementarer Darstellung (von C. F. GEISER). Leipzig, 1867.
2. HAJÓS. GY.: Einführung in die Geometrie (Bevezetés a geometriába). Budapest, 1964.
3. KERÉKJÁRTÓ. B.: Über die Grundlagen der Geometrie. II. Projektive Geometrie (A geometria alapjairól. II. Projektív geometria). Budapest, 1944. Ausgabe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

József MAKLÁRI, Budapest XI., Múegyetem rkp. 3. Ungarn